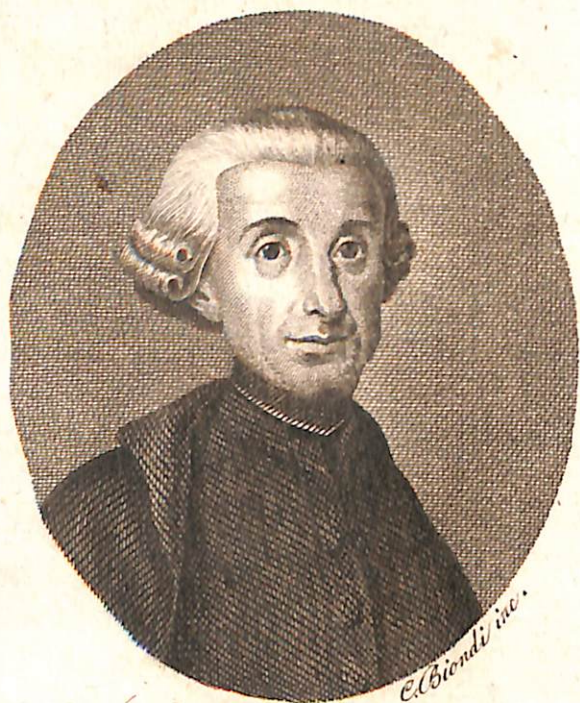




Ab. Vito Caravelli

Celebre Matematico

Nato in Montepeluso nella Lucania nel 1724.

Morto in Napoli nel 1800 ~

In Napoli presso Nicola Gerrasi

1838/8

TRATTATO
DELLA
TRIGONOMETRIA
SFERICA
DI
VITO CARAVELLI.



Biblioteca Provinciale
MATERA
v. S. Ignazio

GATTINI
T
29

IN NAPOLI

NELLA STAMPERIA DE' RAIMONDI
Con licenza de' Superiori
MDCCLXXIX.

DONO EREDI DI
NICOLA E NICOLETTA GATTINI

A' DISCRETI LETTORI.



Egli elementi di Matematica, da più anni da me pubblicati colle stampe, alla dottrina de' Logaritmi, e alla Trigonometria piana non v' associar la Trigonometria sferica; perchè l'uso, al quale furono tali elementi destinati, non l'esigeva.

Ho stimato ora pubblicarla; acciò i giovani, che s'avvalgono de' detti miei elementi, e che amano d'apprenderla, possano apprenderla modellata sul medesimo gusto della Trigonometria piana, e conseguentemente con quella facilità, che concilia alle scienze l'uniformità del metodo.

L'intenzion mia, in trattare qualunque scienza, è stata sempre non di empiria d'idee inadeguate, e spesso capricciose, o di darle un'aria arcana, e misteriosa, per sorprendere senza instruire, e molto meno d'oscurarla con ragionarvi in gergo, affine d'imporre alla moltitudine, e nascondere nel tempo istesso la propria debolezza, vizj nelle scienze matematiche affatto insopportabili; ma di metterla anzi in un tal punto di veduta, che riuscisse agevole a chiunque dovesse apprenderla, e di legarvi talmente le dottrine, che potesse ognuno con facilità comprenderne l'intero sistema.

Se tale mia intenzione si troverà eseguita in quest' opera ricciuola, che ora vi presento, come mi lusingo trovarsi eseguita nelle altre prima pubblicate, non tocca a me a giudicarne: posso solamente assicurare ognuno che non ho in essa trascurato diligenza, per trarre le dottrine dal grado di difficoltà, e di caligine, che s'incontra spesso in altri, che l'hanno prima di me trattata, e da quali, confesso, averne nondimeno tratti de' lumi.

Gradite intanto sì fatta mia fatica, qualunque ella sia; che, se non sarà utile alla gioventù studiosa, dimostrerà almeno il desiderio, che ho sempre di giovarla. Vivete felici.



TRATTATO

DELLA

TRIGONOMETRIA SFERICA.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

DEFINIZIONE I.

1. **S**I dice d'una sfera *cerchio massimo* ogni cerchio generato in essa da una sezione, procedente pel suo centro.

COROLLARIO I.

2. Quindi ogni cerchio massimo d'una sfera ha per centro, e per raggi il centro, e i raggi dell' istessa sfera.

T R A T T A T O

C O R O L L A R I O II.

3. Essendo i cerchi massimi d'una sfera tutt' in piani procedenti pel centro della medesima: ne segue 1° che ogni cerchio massimo deve essere da qualunque altro dell' istessa sfera intersecato; 2° che la comune sezione di due di tali cerchi è sempre un diametro della sfera; 3° che un cerchio massimo, che passa per un punto della superficie della sfera, passa anche pel punto diametralmente opposto; e 4° finalmente che due cerchi massimi s'intersecano in due parti uguali, e le periferie di essi in punti diametralmente opposti.

C O R O L L A R I O III.

4. Finalmente, potendo per una retta passare infiniti piani, e un solo per ambi i lati d'un angolo rettilineo, potranno per due punti della superficie d'una sfera diametralmente opposti passare infiniti cerchi massimi; e per due punti non diametralmente opposti, e alli quali conseguentemente pervengono raggi, che formano un angolo rettilineo, potrà passarne un solo.

D E F I N I Z I O N E II.

5. Si chiama d'una sfera *cerchio minore* ogni cerchio generato in essa da una sezione non procedente pel suo centro.

C O R O L L A R I O I.

6. Adunque ogni cerchio minore divide la sfera in due porzioni disuguali; e 'l diametro della sfera, che passa pel centro d'un cerchio minore, siccome è perpendicolare al medesimo cerchio (§ 151 del tom. 4), così incontra la superficie della sfera ne' vertici delle due porzioni sferiche, nelle quali l' istessa sfera dal medesimo cerchio resta divisa (§ 40 del tom. 4).

CO.

C O R O L L A R I O II.

7. Essendo infiniti i piani, che possono passare per la retta, che congiugne due punti della superficie d'una sfera non diametralmente opposti, senza che passino ancora pel suo centro; infiniti sono pure i cerchi minori d'una sfera, che possono passare per due punti della sua superficie non diametralmente opposti. Sicchè per due punti della superficie d'una sfera, non diametralmente opposti, non vi può passare, se non un solo cerchio massimo (§ 4), e possono passarvi intanto infiniti cerchi minori.

A V V E R T I M E N T O I.

8. Contraffegnino LPMQ qualsivisia sfera, ed A, e B Fig. 1. due punti della sua superficie non diametralmente opposti; e contraffegnino di più LM l'unico cerchio massimo, che può passare per gli detti punti, e PQ qualunque degl' infiniti cerchi minori, che possono pure passare per gli stessi punti. S'intenda congiunta la retta AB, e intorno a tale retta s'intenda girare uno de' detti cerchi, finchè parvenga nel piano dell'altro: è chiaro che deve cadere la porzione ALB del cerchio massimo, minore del mezzo cerchio, dentro della porzione APB, o AQB del cerchio minore, e la porzione restante AMB del cerchio massimo, maggiore del mezzo cerchio, fuori della porzione AQB, o APB del cerchio minore. E perciò di ciascuno degli archi APB, AQB l'arco ALB è minore, e l'arco AMB è maggiore.

C O R O L L A R I O III.

9. Quindi di tutti gl'infiniti archi circolari, che possono tramezzare tra due punti della superficie d'una sfera, non diametralmente opposti, e archi di tutti gl'infiniti cerchi, che possono per tali punti passare, l'arco minore della mezza periferia dell'unico cerchio massimo, che può passare per sì fatti punti, è il minimo.

A 2

AV-

T R A T T A T O

A V V E R T I M E N T O II.

10. Si noti ancora che se sulla superficie di qualunque sfera si vuole procedere da un punto a un altro per la via più breve, non si può procedere, se non nella direzione di un piano, che passa per tali punti, e conseguentemente per l'arco di qualche cerchio dell'istessa sfera. Or se i punti sono diametralmente opposti, tale arco non può essere, se non la mezza periferia di qualunque degl'infiniti cerchi massimi, che possono per sì fatti punti passare; perchè per gli detti punti passare non vi possono, se non cerchi massimi: se poi i punti non sono diametralmente opposti, il detto arco è in tale caso l'arco minore della mezza periferia dell'unico cerchio massimo, che passa per tali punti, e che agli medesimi punti termina, come il minimo di tutti gl'infiniti archi circolari, che terminano negli stessi punti.

C O R O L L A R I O IV.

11. Quindi è che sulla superficie di qualunque sfera la distanza da un punto a un altro si determina sempre per l'arco di cerchio massimo, che non oltrepassa la mezza periferia, e che termina agli medesimi punti; come l'arco, che dinota la via più breve, per cui si può dall'uno all'altro punto pervenire.

D E F I N I Z I O N E III.

12. D'un cerchio qualunque d'una sfera si dicono *asse* il diametro della sfera, che l'è perpendicolare, e *poli* gli estremi dell'asse.

C O R O L L A R I O I.

13. Quindi di qualunque cerchio minore d'una sfera l'asse è il diametro della sfera, che passa pel centro dell'istesso cerchio (§ 6); e quindi di qualunque cerchio d'una sfera i poli sono i vertici delle due porzioni sferiche, nel-

DELLA TRIG. SFERICA:
nelle quali la sfera dal cerchio resta divisa; le quali porzioni sono mezze sfere, qualora il cerchio è massimo.

C O R O L L A R I O II.

14. Essendo i vertici delle due porzioni sferiche, nelle quali resta divisa una sfera da qualunque suo cerchio, vertici ancora delle due porzioni, nelle quali viene divisa da qualunque altro cerchio parallelo: ne segue che i cerchi paralleli in una sfera hanno i medesimi poli.

C O R O L L A R I O III.

15. Essendo di più a ogni cerchio d'una sfera perpendicolare il suo asse; saranno a ogni cerchio d'una sfera perpendicolari tutti gl'infiniti cerchi massimi, che possono passare pel suo asse, e conseguentemente per gli suoi poli: anzi non potendosi su d'un piano da un suo punto innalzare, se non una sola perpendicolare; a qualsivisia cerchio d'una sfera non vi possono essere perpendicolari altri cerchi massimi, se non quelli, che passano per gli suoi poli.

C O R O L L A R I O IV.

16. E perciò un cerchio massimo d'una sfera se passa per gli poli di qualsivisia altro cerchio dell'istessa sfera, divide tale cerchio perpendicolarmente, e se il divide perpendicolarmente, passa per gli suoi poli.

C O R O L L A R I O V.

17. E se di due cerchi massimi d'una sfera il primo passa per gli poli del secondo; intersecandosi perpendicolarmente, il secondo passa anche per gli poli del primo. E perciò tutti gl'infiniti cerchi massimi, che possono passare per gli poli d'un altro cerchio massimo, hanno tutt'i poli di essi nella periferia di tale altro cerchio massimo.

T R A T T A T O
C O R O L L A R I O VI.

18. Di vantaggio ogni cerchio massimo d'una sfera, che passa per gli poli di qualsivisia cerchio minore dell' istessa sfera, passa anche per l' asse di sì fatto cerchio minore, e conseguentemente pel suo centro. E perciò ogni cerchio massimo, che passa per gli poli di qualunque cerchio minore, divide tale cerchio minore in due parti uguali.

C O R O L L A R I O VII.

19. Non potendo in oltre per due punti della superficie d'una sfera, non diametralmente opposti, passare, se non un solo cerchio massimo (§ 4); e non potendo un cerchio massimo d'una sfera essere perpendicolare a qualsivisia altro cerchio della medesima, se quello non passa per gli poli di questo (§ 16): ne segue che per un punto della superficie d'una sfera, diverso dagli poli di un cerchio qualunque della medesima, non può passare, se non un solo cerchio massimo perpendicolare a sì fatto cerchio, e deve essere quello, che passa anche per gli suoi poli.

A V V E R T I M E N T O.

Fig. 2. 20. Contraffegnino ABCD una sfera, AC un suo cerchio massimo, LM un cerchio minore parallelo ad AC, BD l'asse di tali cerchi, B, e D i poli di essi, e BAD, BED, BFD, ec. cerchi massimi procedenti per B, e D. Saranno i cerchi BAD, BED, BFD, ec. tutti perpendicolari ad AC, LM (§ 16). S' intendano di più tirati nel cerchio AC i raggi OA, OE, OF, e nel cerchio LM i raggi PL, PN, PQ; saranno retti sì gli angoli BOA, BOE, BOF, che gli angoli BPL, BPN, BPQ. E perciò saranno sì BA, BE, BF, che DA, DE, DF archi di quadranti, BL, BN, BQ minori di archi di quadranti, DL, DN, DQ maggiori di archi di quadranti, e l'angolo LPN = AOE.

DELLA TRIG. SFERICA.
C O R O L L A R I O VIII.

21. Quindi ne segue 1°. che gli archi di cerchi massimi, che tramezzano tra la periferia di qualunque altro cerchio massimo, e i suoi poli, sono archi di quadranti; 2°. che gli archi di cerchi massimi, che tramezzano tra la periferia di qualunque cerchio minore, e i poli di esso, sono degli archi di quadranti minori quelli, che si trovano dal lato del polo più vicino, e maggiori quelli, che si trovano dal lato del polo più remoto; 3°. che se il cerchio massimo ABCD è perpendicolare all'altro cerchio massimo AC; prendendo gli archi AB, AD ognuno di 90 gr., i punti B, e D sono poli del cerchio AC; 4°. che se BAD, BED sono due cerchi massimi, che s'intersecano in B, e D; prendendo gli archi BA, BE ognuno di gr. 90, il cerchio massimo AC, che passa per gli punti A, ed E, ha per poli i punti B, e D, e viene conseguentemente dagli stessi cerchi BAD, BED perpendicolarmente intersecato; e 5°. finalmente che se i cerchi AC, LM sono paralleli, e vengono intersecati dagli cerchi massimi BAD, BED, procedenti per gli poli di essi, l'arco LN è simile all'arco AE.

D E F I N I Z I O N E IV.

22. Si dice *angolo sferico* l'inclinazione scambievolmente, che hanno nel punto, in cui s'uniscono sulla superficie d'una sfera due archi di cerchi della medesima sfera. Dell'angolo sferico poi si dicono *vertice* il punto, in cui i due archi s'uniscono, e *lati* gli archi istessi.

D E F I N I Z I O N E V.

23. Un angolo sferico si dice *retto*, o *obbliguo*, secondo che uguaglia sì, o no un angolo retto rettilineo. L'angolo sferico obbliguo si chiama *ottuso*, o *acuto*, secondo che è maggiore, o minore del retto. Di più i due angoli sferici, che forma un arco circolare con un altro, che incontra sulla superficie d'una sfera, e che fa uno a destra, e l'altro a sinistra, si chiamano *angoli conseguenti*. E finalmente

te gli angoli sferici, che hanno un vertice comune, e i lati nelle direzioni delle medesime periferie circolari, si dicono *angoli verticali*.

COROLLARIO I.

24. Essendo l'angolo sferico la scambievole inclinazione, che hanno nel punto, in cui s'uniscono sulla superficie d'una sfera due archi di cerchi della medesima sfera; sarà ogni angolo sferico l'istesso, che l'angolo rettilineo formato dalli due elementi de' suoi lati adiacenti al vertice, e conseguentemente l'istesso, che l'angolo rettilineo formato dalle rette tangenti i lati nell'istesso vertice.

COROLLARIO II.

25. Quindi gli angoli sferici verticali sono tra essi uguali, e gli angoli sferici conseguenti uguagliano due angoli retti.

COROLLARIO III.

26. Se i lati d'un angolo sferico appartengono a cerchi massimi d'una sfera: perchè le tangenti di tali archi nel vertice dell'angolo sono perpendicolari al diametro comune de' cerchi, delle cui periferie gli archi sono porzioni; perciò l'angolo sferico in tale caso è uguale all'inclinazione scambievole de' mezzi cerchi, delle cui periferie sono porzioni i lati dell'angolo.

COROLLARIO IV.

27. Quindi ne segue 1.^o che se un angolo sferico, formato da due archi di cerchi massimi, è retto, tali cerchi massimi s'intersecano perpendicolarmente; e se s'intersecano perpendicolarmente, l'angolo sferico è retto; 2.^o che se un angolo sferico, formato pure da archi di cerchi massimi, è retto, ognuno de' lati di tale angolo, prolungato se bisogna, passa pel polo del cerchio, a cui appartiene l'altro lato; e se

se ognuno de' lati, prolungato se bisogna, passa pel polo del cerchio, a cui appartiene l'altro lato, l'angolo sferico è retto; e 3.^o finalmente che se un angolo sferico, formato anche da archi di cerchi massimi, è retto, e uno de' lati si estende, finchè sia arco di quadrante; il termine di tale arco è polo del cerchio, a cui appartiene l'altro lato; e ogni arco di cerchio massimo, che tramezza tra l'istesso altro lato, e l'istesso polo, è arco di quadrante, e forma col medesimo lato angolo retto.

COROLLARIO V.

28. Sieno in oltre della sfera ABCD due mezzi cerchi massimi BAD, BED, che s'intersecano nel diametro BD; e dal centro comune O sieno tirati in essi i raggi OA, OE, ambidue perpendicolari al diametro BD. Essendo l'angolo rettilineo AOE l'inclinazione de' detti mezzi cerchi; sarà sì l'angolo sferico ABE, che l'altro ADE uguale all'angolo rettilineo AOE; e faranno conseguentemente i due angoli sferici ABE, ADE tra essi uguali.

COROLLARIO VI.

29. S'intenda di vantaggio per gli punti A, ed E passare il cerchio massimo AC, che, a cagione degli archi BA, BE di quadranti, ha per poli i punti B, e D (§ 21). Sarà l'angolo sferico ABE, o ADE di tanti gradi, quanti ne contiene l'angolo AOE, e conseguentemente l'arco AE. Per la qual cosa la misura d'ogni angolo sferico, formato da archi di cerchi massimi, è l'arco, che resta compreso tra i suoi lati, del cerchio massimo, che ha per uno de' suoi poli il vertice dell'istesso angolo.

COROLLARIO VII.

30. Avendo finalmente il cerchio massimo AC per poli i punti B, e D, avranno i cerchi massimi BAD, BED i poli di essi nella periferia del cerchio AC (§ 17). Sieno X uno de' poli del cerchio BAD, e Y uno de' poli del cerchio BED; e s'intendano tirati i raggi OX, OY, che faranno

ranno metà degli assi de' detti cerchi BAD, BED. Or, essendo di gr. 90 sì l'arco AX, che l'arco EY, farà l'arco AX, uguale all'arco EY; e conseguentemente, toltone l'arco comune EX, farà l'arco AE uguale all'arco XY. E perciò l'angolo sferico ABE, e conseguentemente l'angolo d'inclinazione de' cerchi massimi BAD, BED è uguale all'angolo d'inclinazione degli assi de' medesimi cerchi, e per conseguenza viene misurato dalla distanza XY de' poli X, e Y.

DEFINIZIONE VI.

31. Si chiama *triangolo sferico* ogni porzione di superficie sferica, terminata da tre archi di cerchi della medesima sfera. Il triangolo sferico poi si dice per rispetto de' lati *equilatero*, *isoscele*, o *scaleno*, secondochè i lati sono o tutti e tre uguali, o uguali due solamente, o tutti e tre disuguali; e per rispetto degli angoli *rettangolo*, o *obliquangolo*, secondochè ha uno, o più angoli retti, o niuno. E finalmente nel triangolo rettangolo, che ha un angolo retto, il lato opposto a tale angolo si nomina *ipotenusa*.

DEFINIZIONE VII.

32. Si dice *Trigonometria sferica* la scienza, che insegna a sciogliere in tutt' i casi possibili il seguente problema: *date tre parti di qualunque triangolo sferico, terminato da archi di cerchi massimi di qualsivisia sfera, determinare col calcolo aritmetico ciascuna delle altre.*

AVVERTIMENTO I.

33. Nella Trigonometria sferica occorre, come nella piana determinare e lati, e angoli di triangoli sferici; i lati, per avere le distanze de' punti, tra' quali tramezzano; e gli angoli, per avere con ognuno di essi la posizione d'un punto per rispetto di due altri, e per condurci tal volta alla determinazione di lati ignoti. Tali determinazioni occorrono soltanto relativamente a triangoli sferici, terminati da archi di cerchi massimi; perchè sì fatti archi sulla superficie di qua-

qua-

qualunque sfera dinotano le distanze de' punti, tra' quali tramezzano, e formano angoli costanti, e determinabili per mezzo delle inclinazioni de' piani, ne' quali si trovano. Quindi in seguito, qualora diremo triangolo sferico, e angolo sferico, intenderemo sempre un triangolo terminato da archi di cerchi massimi, e un angolo pure da archi di cerchi massimi formato.

AVVERTIMENTO II.

34. Sebbene nella Trigonometria sferica si sciolga l'istesso probl. relativamente a triangoli sferici, che s'è sciolto nella Trigonometria piana relativamente a triangoli rettilinei: nondimeno le regole sono diverse. Nè ciò deve recare meraviglia. Nella Trigonometria piana si paragonano i lati de' triangoli rettilinei co' seni, colle tangenti, ec. degli angoli; nella Trigonometria sferica si debbono paragonare i seni, le tangenti, ec. de' lati de' triangoli sferici co' seni, colle tangenti, ec. degli angoli: in quella si determinano le lunghezze de' lati de' triangoli; in questa si debbono determinare i valori de' lati in gradi, e minuti: e finalmente in quella, noti due angoli del triangolo, è noto anche il terzo; in questa dalla conoscenza di due angoli del triangolo non si può argomentare il valore del terzo angolo. L'ordine intanto che in questo trattato seguiremo, sarà il seguente. I°. Premetteremo alcune proprietà de' triangoli sferici, riguardanti e lati, e angoli di essi, acciò ci sieno di scorta nelle dottrine, che dovranno seguire. II°. Premetteremo alcuni principj teoretici riguardanti i coseni della somma, e della differenza di due angoli piani, o di due archi d'un quadrante circolare, acciò cogli altri stabiliti nella Trigonometria piana, ci possano menare all'intero sviluppo di quanto ci occorre per la Trigonometria sferica. III°. Esporremo le proporzioni, che risultano dal paragonare insieme i seni, le tangenti, ec. de' lati de' triangoli sferici co' seni, colle tangenti, ec. degli angoli di essi. IV°. Procederemo coll'ajuto di sì fatte proporzioni alla soluzione del suddetto probl. secondo tutt' i casi possibili. V°. Finalmente esporremo i rapporti delle variazioni, che

che possono accadere nelle parti di qualunque triangolo sferico, qualora tali variazioni, saranno picciolissime, e due delle dette parti rimarranno invariabili. Il che servirà per non essere nella pratica obbligato a rifare un intero calcolo, qualora si dà il caso di picciola variazione in un lato, o in un angolo d' un triangolo sferico, o si dà il caso di conoscersi un picciolo errore commesso nella misura d' un lato, o d' un angolo; e per poterci nella pratica guidare in modo, che gl' inevitabili piccioli errori, ne quali si cade in misurare alcune parti de' triangoli sferici coll' ajuto di strumenti, anche d' esattissime costruzioni, non arrechino nelle determinazioni di quelle, che il calcolo ci somministra, se non errori assai piccioli, e da non tenerne conto.

C A P. I.

Si premettono alcune proprietà de' triangoli sferici, riguardanti e lati, e angoli di essi.

T E O R. I.

35. *In qualunque triangolo sferico ogni lato è minore della somma degli altri due, e tutti e tre insieme sono sempre minori dell' intera periferia.*

D I M O S T R A Z I O N E.

Fig. 3. **C**ontraffegnino ABC qualunque triangolo sferico, e O il centro della sfera. Dal centro O agli vertici degli angoli del triangolo s' intendano tirati i raggi OA, OB, OC. Saranno i tre archi AB, BC, CA misura degli tre angoli piani AOB, BOC, COA, che formano l'angolo solido in O. Or in qualunque angolo solido, formato da tre angoli piani, ognu-

ognuno degli angoli piani è minore della somma degli altri due (§ 77 del tom. 4.), e tutti e tre insieme sono minori di quattro retti (§ 78 del tom. 4.). Sicchè in qualunque triangolo sferico ABC ogni lato è minore della somma degli altri due, e tutti e tre insieme sono sempre minori dell' intera periferia. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

C O R O L L A R I O.

36. Quindi in qualunque triangolo sferico ogni lato è minore della mezza periferia; poichè se un lato fosse uguale, o maggiore della mezza periferia, gli altri due insieme farebbero della mezza periferia maggiori, e tutti e tre insieme maggiori dell' intera periferia; il che è impossibile.

T E O R. II.

37. *Se in un triangolo sferico due lati sono uguali, gli angoli sferici opposti a tali lati sono anch' essi uguali.*

D I M O S T R A Z I O N E.

Abbia il triangolo sferico ABC il lato $AB = BC$; e Fig. 4. sieno O il centro della sfera, e OA, OC i raggi, che giungono agli punti A, e C. S' intendano da B calate su AO, OC le perpendicolari BD, BE, e dagli punti D, ed E tirate nel settore circolare AOC le rette DP, EP anche perpendicolari ad OA, OC; e, prolungate DP, EP, finchè s' uniscano in P, s' intendano congiunte le OP, BP. Saranno gli angoli sferici BAC, BCA rispettivamente uguali agli angoli rettilinei BDP, BEP (§ 26). Essendo uguali gli archi BA, BC per l'ipotesi, uguali saranno ancora e i seni BD, BE, e i coseni OD, OE di essi. E' di più al quadrato di OP uguale sì la somma de' quadrati di OD, DP, che la somma de' quadrati di OE, EP. Dunque la somma de' quadrati di OD, DP uguaglia la somma de' quadrati di OE, EP. E perciò uguali sono tra essi i quadrati di DP, EP; e conseguentemente uguali le rette DP, EP. Per la qual cosa gli angoli rettilinei BDP, BEP hanno i lati BD, DP ri-

rispettivamente uguali agli lati BE , EP , e la base BP comune. Sicchè tali angoli rettilinei BDP , BEP sono uguali; e perciò uguali sono anche gli angoli sferici BAC , BCA . Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

C O R O L L A R I O.

38. Quindi se un triangolo sferico è equilatero, è anche equiangolo.

T E O R. III.

39. Se in un triangolo sferico due angoli sferici sono uguali, i lati opposti a tali angoli sono anch'essi uguali.

D I M O S T R A Z I O N E.

Fig. 5. Abbia il triangolo sferico ABC gli angoli sferici BAC , BCA uguali; e sieno O il centro della sfera, e OA , OC i raggi, che giungono agli punti A , e C . Se i lati AB , BC non sono uguali; sia, s'è possibile, BC maggiore di AB , e si tagli CF uguale ad AB . S'intendano dagli punti B , e F calate su i raggi OA , OC rispettivamente le perpendicolari BD , FE , e dagli punti D , ed E tirate nel settore circolare AOC le rette DP , EP pure perpendicolari ad OA , OC ; e, prolungate le DP , EP , finchè s'uniscano in P , s'intendano congiunte le BP , FP , OP . Saranno gli angoli sferici BAC , BCA uguali rispettivamente agli angoli rettilinei BDP , FEP (§ 26). Essendo uguali gli archi BA , FC , uguali saranno ancora e i seni BD , FE , e i coseni OD , OE di estrazione, le rette DP , EP . Dunque gli angoli rettilinei BDP , FEP hanno i lati BD , DP rispettivamente uguali agli lati FE , EP , e la base BP maggiore della base FP . E perciò l'angolo BDP è maggiore dell'angolo FEP ; e conseguentemente l'angolo sferico BAC è maggiore dell'angolo sferico BCA . Or ciò ripugna all'ipotesi. Dunque ripugna che sia il lato BC maggiore di AB . Similmente si dimostra non essere BC minore di BA . Sicchè il lato BC è uguale al lato AB . Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

CO.

C O R O L L A R I O I.

40. Quindi se un triangolo sferico è equiangolo, è anche equilatero.

C O R O L L A R I O II.

41. Essendo, supposto il lato BC maggiore di BA , l'angolo sferico BAC maggiore di BCA : ne segue che se in un triangolo sferico un lato è maggiore d'un altro, l'angolo opposto al lato maggiore è pure maggiore dell'angolo opposto al lato minore.

C O R O L L A R I O III.

42. Se finalmente nel triangolo sferico ABC l'angolo sferico BAC è maggiore di BCA , il lato BC non può essere nè uguale, nè minore di BA ; altrimenti l'angolo BAC farebbe uguale, o minore di BCA . Quindi il lato BC è maggiore di BA . E perciò se in un triangolo sferico un angolo è maggiore d'un altro, il lato opposto all'angolo maggiore è anche maggiore del lato opposto all'angolo minore.

T E O R. IV.

43. Se in un triangolo sferico ABC due lati BA , BC sono archi di quadranti, gli angoli sferici BCA , BAC , opposti a tali lati, sono retti; e al contrario. Fig. 4.

D I M O S T R A Z I O N E.

I. Sieno i lati BA , BC archi di quadranti. Sarà B il polo del cerchio, a cui appartiene l'arco AC . Onde gli angoli sferici BCA , BAC sono retti (§ 27).

II. Sieno retti gli angoli sferici BCA , BAC . Dovendo gli archi AB , CB ambidue passare pel polo del cerchio, a cui appartiene l'arco AC (§ 27); farà il punto B , in cui tali archi s'uniscono, sì fatto polo. E perciò gli archi BA

BA, BC sono archi di quadranti. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

C O R O L L A R I O I.

44. Quindi d' un triangolo sferico se tutti e tre i lati sono archi di quadranti, tutti e tre gli angoli sferici sono retti; e se tutti e tre gli angoli sferici sono retti, tutti e tre i lati sono archi di quadranti.

C O R O L L A R I O II.

45. Essendo in oltre l' arco AC misura dell' angolo sferico ABC, qualora B è polo del cerchio, a cui l' stesso arco AC s'appartiene (§ 29). Se i lati AB, BC sono archi di quadranti, o gli angoli sferici BCA, BAC sono retti, l' angolo sferico ABC sarà maggiore, o minore del retto, secondochè il lato AC sarà maggiore, o minore dell' arco di quadrante; e all' opposto il lato AC sarà maggiore, o minore dell' arco di quadrante, secondochè l' angolo sferico ABC sarà maggiore, o minore del retto.

T E O R. V.

46. Se nel triangolo sferico ABC, rettangolo in A, uno de' lati adiacenti all' angolo retto è arco di quadrante, l' angolo opposto a tale lato è retto; e al contrario.

D I M O S T R A Z I O N E.

I. Sia AB arco di quadrante. Essendo l' angolo in A retto, e AB arco di quadrante; sarà B polo del cerchio, a cui l' arco AC s'appartiene. E perciò l' angolo BCA è retto (§ 27).

II. Sia retto l' angolo in C. Essendo i due angoli in A, e C retti; saranno BC, BA archi di quadranti (§ 43). E perciò arco di quadrante è il lato AB. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

AV.

A V V E R T I M E N T O.

47. Dell' stesso modo si dimostra essere l' angolo in B retto, se AC è arco di quadrante, ed essere AC arco di quadrante, se l' angolo in B è retto.

C O R O L L A R I O I.

48. Sicchè in un triangolo sferico ABC, rettangolo in A, gli altri due angoli sono retti, se i lati opposti sono archi di quadranti; e i lati AB, AC, adiacenti all' angolo retto in A, sono archi di quadranti, se gli angoli opposti sono retti.

C O R O L L A R I O II.

49. Essendo arco di quadrante BC, qualora B, o C è polo del cerchio, a cui appartiene AC, o AB (§ 27). Dunque se nel triangolo sferico ABC, rettangolo in A, uno de' lati AB, AC è arco di quadrante, o ambidue sono tali, ovvero uno degli angoli in C, e B è retto, o sono retti ambidue, il lato BC, opposto al retto in A, è sempre arco di quadrante.

T E O R. VI.

50. Se nel triangolo sferico ABC, rettangolo in A, uno de' lati adiacenti all' angolo retto è minore dell' arco di quadrante, l' angolo opposto a tale lato è acuto; e al contrario. Fig. 6.

D I M O S T R A Z I O N E.

I. Sia AB minore dell' arco di quadrante. S' intenda AB prolungato in D, finchè sia AD arco di quadrante; e s' intenda per D, e C menato l' arco CD di cerchio massimo.

Essendo l' angolo in A retto, e AD arco di quadrante; sarà D polo del cerchio, a cui appartiene AC (§ 27). On-
C de

de l'angolo sferico DCA è retto (§ 27); e conseguentemente l'angolo sferico BCA è acuto.

II. Sia l'angolo sferico BCA acuto. S'intenda per C menato l'arco CD di cerchio massimo in modo, che l'angolo ACD sia retto; e s'intenda l'arco AB prolungato in D.

Essendo retti i due angoli DAC, DCA; faranno DA, DC archi di quadranti (§ 43). Sicchè AB è minore dell'arco di quadrante. Ch'è quanto bisognava dimostrare.

A V V E R T I M E N T O.

51. Dell'istesso modo si dimostra essere l'angolo sferico ABC acuto, se AC è minore dell'arco di quadrante, ed essere il lato AC minore dell'arco di quadrante, se l'angolo ABC è acuto.

C O R O L L A R I O I.

52. Quindi se in un triangolo sferico ABC, rettangolo in A, i due lati AB, AC sono ambidue minori di archi di quadranti, gli angoli in C, e B, opposti a tali lati, sono ambidue acuti; e se tali angoli sono ambidue acuti, i lati opposti sono ambidue minori di archi di quadranti.

C O R O L L A R I O II.

53. Supposto che i due lati AB, AC sieno minori di archi di quadranti, nel qual caso gli angoli in C, e B sono acuti, o che i due angoli in C, e B sieno acuti, nel qual altro caso i lati AB, AC sono minori di archi di quadranti; l'angolo ADC, fatto nel polo D, è sempre acuto (§ 45). E' anche l'angolo ABC sempre acuto, e perciò sempre ottuso il suo conseguente CBD. Dunque nel triangolo sferico CBD l'angolo CDB è minore sempre di CBD. E perciò CB è sempre minore di CD. Ma, per essere D polo del cerchio, a cui appartiene AC, è CD arco di quadrante (§ 27). Sicchè CB è sempre minore dell'arco di quadrante. Per la qual cosa se in un triangolo sferico ABC, rettangolo in A, i due lati AB, AC sono minori

nori di archi di quadranti, ovvero i due angoli in B, e C sono acuti, l'ipotenusa BC è sempre minore dell'arco di quadrante.

T E O R. VII.

54. Se nel triangolo sferico ABC, rettangolo in A, uno de' lati adiacenti all'angolo retto è maggiore dell'arco di quadrante, l'angolo sferico opposto a tale lato è ottuso; e al contrario. Fig. 7.

D I M O S T R A Z I O N E.

I. Sia AB maggiore dell'arco di quadrante. Da AB si tagli l'arco AD di quadrante; e s'intenda per D, e C menato l'arco CD di cerchio massimo.

Essendo l'angolo in A retto, e AD arco di quadrante; farà D polo del cerchio, a cui appartiene AC (§ 27). Onde l'angolo ACD è retto (§ 27); e conseguentemente l'angolo ACB è ottuso.

II. Sia l'angolo sferico ACB ottuso. S'intenda per C menato l'arco CD di cerchio massimo in modo, che l'angolo ACD sia retto.

Essendo retti i due angoli DAC, DCA, faranno DA, DC archi di quadranti (§ 43). Sicchè AB è maggiore dell'arco di quadrante. Ch'è quanto bisognava dimostrare.

A V V E R T I M E N T O.

55. Dell'istesso modo si dimostra essere l'angolo sferico ABC ottuso, se AC è maggiore dell'arco di quadrante, ed essere AC maggiore dell'arco di quadrante, se ABC è ottuso.

C O R O L L A R I O I.

56. Quindi se in un triangolo sferico ABC, rettangolo in A, i due lati AB, AC sono ambidue maggiori di archi di quadranti, gli angoli in C, e B, opposti a tali lati, sono ambidue ottusi; e se tali angoli sono ambidue ottusi, i lati

T R A T T A T O
lati opposti sono ambidue maggiori di archi di quadranti.

C O R O L L A R I O II.

57. Supposto che i due lati AB, AC sieno maggiori di archi di quadranti, nel qual caso gli angoli in C , e B sono ottusi, o che i due angoli in C , e B sieno ottusi, nel qual' altro caso i lati AB, AC sono maggiori di archi di quadranti; l'angolo ADC , fatto nel polo D , è sempre ottuso (§ 45); e perciò il suo conseguente CDB sempre acuto. E' anche ABC sempre ottuso. Dunque nel triangolo CBD l'angolo in D è sempre minore dell'angolo in B . E perciò CB è sempre minore di CD (§ 42). Ma, per essere D polo del cerchio, a cui appartiene AC , è CD arco di quadrante (§ 27). Sicchè CB è sempre minore dell'arco di quadrante. Per la qual cosa se in un triangolo sferico ABC , rettangolo in A , i due lati AB, AC sono maggiori di archi di quadranti, ovvero i due angoli in C , e B sono ottusi, l'ipotenusa BC è pure sempre minore dell'arco di quadrante.

T E O R. VIII.

Fig. 8. 58. *Se nel triangolo sferico ABC , rettangolo in A , il lato AB è maggiore, e AC minore dell'arco di quadrante, l'angolo sferico ACB è ottuso, e ABC è acuto; e al contrario.*

D I M O S T R A Z I O N E.

I. Sieno AB maggiore, e AC minore dell'arco di quadrante. Tagliato l'arco AD di quadrante, e disteso AC in E , finchè AE sia arco di quadrante, s'intendano menati gli archi DC, BE di cerchi massimi.

Essendo l'angolo in A retto, e AD, AE archi di quadranti; faranno $D, ed E$ rispettivamente poli de' cerchi, a quali appartengono gli archi AC, AB (§ 27). Sicchè gli angoli DCA, EBA sono retti (§ 43). E perciò l'angolo ACB è ottuso, e ABC è acuto.

II.

DELLA TRIG. SFERICA.

II. Sieno l'angolo ACB ottuso, e ABC acuto. S'intendano per gli punti $B, e C$ menati gli archi BE, CD di cerchi massimi in modo, che gli angoli ABE, ACD sieno retti.

Essendo retti sì gli angoli EAB, EBA , che gli angoli DAC, DCA ; farà arco di quadrante sì AE , che AD (§ 43). Dunque AB è maggiore dell'arco di quadrante, e AC è minore. Ch'è quanto bisognava dimostrare.

C O R O L L A R I O I.

59. Essendo D polo del cerchio, a cui appartiene l'arco AC , e AC minore dell'arco di quadrante; farà l'angolo ADC acuto; onde il suo conseguente CDB è ottuso. E' l'angolo CBD acuto. Dunque nel triangolo CDB l'angolo CDB è maggiore di CBD ; e perciò CB è maggiore di CD (§ 42). Ma CD è arco di quadrante (§ 27). Sicchè CB è maggiore dell'arco di quadrante. Per la qual cosa se in un triangolo sferico ABC , rettangolo in A , il lato AB è maggiore dell'arco di quadrante, e l'lato AC è minore, ovvero l'angolo ACB è ottuso, e ABC è acuto, l'ipotenusa BC è sempre maggiore dell'arco di quadrante.

C O R O L L A R I O II.

60. E perciò se in un triangolo sferico ABC , rettangolo in A , l'ipotenusa BC è minore dell'arco di quadrante, i due lati AB, AC sono allora o ambidue minori, o ambidue maggiori di archi di quadranti, e i due angoli ABC, ACB conseguentemente o ambidue acuti, o ambidue ottusi: altrimenti se AB fosse maggiore, e AC minore dell'arco di quadrante, o l'angolo ACB ottuso, e ABC acuto, l'ipotenusa BC sarebbe maggiore, e non minore dell'arco di quadrante (§ prec.). Similmente se in un triangolo sferico ABC , rettangolo in A , l'ipotenusa BC è maggiore dell'arco di quadrante; degli lati AB, AC uno deve essere maggiore, e l'altro minore dell'arco di quadrante; e degli angoli ACB, ABC uno deve essere ottuso, e l'altro acuto: altrimenti se i lati AB, AC fossero o ambidue minori, o ambidue maggiori

Fig. 8.

giori di archi di quadranti, o gli angoli ACB , ABC ambidue acuti, o ambidue ottusi, l'ipotenusa BC sarebbe minore, e non maggiore dell'arco di quadrante (§ 53, e 57).

T E O R. IX.

Fig. 9, 61. Se dal vertice dell'angolo B di qualsivoglia triangolo
e 10. sferico ABC si mena l'arco BD di cerchio massimo, perpendicolare al lato opposto AC ; tale arco cade dentro del triangolo, se gli angoli in A , e C sono della medesima specie, cioè ambi acuti, o ambi ottusi, e fuori, se sono di specie diverse.

D I M O S T R A Z I O N E.

Fig. 9. I. Sieno nel triangolo ABC gli angoli BAC , BCA ambi acuti. Se si nega cadere l'arco perpendicolare ad AC dentro del triangolo, caschi fuori, s'è possibile, e sia l'arco BE , che incontra AC prolungato in E . Essendo l'angolo BCA acuto, farà il suo conseguente BCE ottuso. E perciò BE , come opposto nel triangolo rettangolo BEA all'angolo acuto in A , farà minore dell'arco di quadrante (§ 50), e come opposto nel triangolo rettangolo BEC all'angolo ottuso BCE , farà maggiore dell'arco di quadrante (§ 54). Or ciò è impossibile. Dunque è impossibile che l'arco di cerchio massimo BD , menato dal punto B perpendicolare ad AC , non caschi dentro del triangolo ABC . L'istessa è la dimostrazione, qualora gli angoli BAC , BCA sono ambidue ottusi.

Fig. 10. II. Sieno nel triangolo ABC l'angolo in A acuto, e l'angolo in C ottuso. Se si nega cadere l'arco perpendicolare ad AC fuori del triangolo, caschi dentro, s'è possibile, e sia BE . Sarà BE , come opposto nel triangolo rettangolo BEA all'angolo acuto BAE , minore dell'arco di quadrante (§ 50), e come opposto nel triangolo rettangolo BEC all'angolo ottuso BCE , maggiore dell'arco di quadrante (§ 54). Or ciò è similmente impossibile. Sicchè è impossibile che l'arco BD di cerchio massimo, perpendicolare ad AC , non caschi in tale caso fuori del triangolo ABC . Ch'è quanto bisognava dimostrare.

AV.

A V V E R T I M E N T O.

62. Si noti che se gli angoli in A , e C sono ambi-
due retti: siccome il punto B è in tale caso polo del cerchio, a cui appartiene l'arco AC (§ 27); così sono perpendicolari ad AC tutti gl' infiniti archi di cerchi massimi, menati da B agl' infiniti punti dell' intera periferia, di cui l'arco AC è parte.

T E O R. X.

63. In ogni triangolo sferico ABC la somma di due
angoli BCA , BAC è maggiore, uguale, o minore di due
retti, secondochè la somma de' lati opposti AB , BC è maggiore, uguale, o minore della mezza periferia; e al contrario.

D I M O S T R A Z I O N E.

S' intendano prolungati gli archi AB , AC , finchè s'intersechino in D . Sarà ABD una mezza periferia (§ 3); e farà l'angolo in D uguale all'angolo in A (§ 28).

I. Secondochè la somma di AB , BC è maggiore, uguale, o minore di ABD ; così BC è maggiore, uguale, o minore di BD , e conseguentemente l'angolo in D è maggiore, uguale, o minore dell'angolo BCD . Sicchè secondochè la somma de' lati AB , BC è maggiore, uguale, o minore della mezza periferia; così l'angolo in A è maggiore, uguale, o minore dell'angolo BCD , e conseguentemente la somma degli angoli BAC , BCA è maggiore, uguale, o minore della somma degli angoli BCD , BCA , o sia di due retti (§ 25).

II. In oltre secondochè la somma degli angoli BAC , BCA è maggiore, uguale, o minore di due retti, o sia della somma degli angoli BCD , BCA ; così l'angolo in A è maggiore, uguale, o minore dell'angolo BCD . Sicchè secondochè la somma degli angoli BAC , BCA è maggiore, uguale, o minore di due retti; così l'angolo in D è maggiore, uguale, o minore dell'angolo BCD ; e perciò BC è mag-

maggiore, uguale, o minore di BD, e conseguentemente la somma de' lati AB, BC è maggiore, uguale, o minore di ABD, o sia della mezza periferia. Ch'è quanto bisognava dimostrare.

T E O R. XI.

64. In qualunque triangolo sferico ogni angolo è minore di due retti, e tutti e tre insieme sono sempre minori di sei retti, e maggiori di due.

D I M O S T R A Z I O N E.

Essendo ogni angolo di qualunque triangolo sferico, una col suo conseguente esterno uguale a due retti (§ 25). Sarà ogni angolo di qualunque triangolo sferico minore di due retti; e conseguentemente tutti e tre insieme minori di sei retti.

Contraffegni in oltre ABC qualunque triangolo sferico; e s'intendano gli archi AB, AC prolungati, finchè s'intersechino in D.

Se la somma degli angoli BAC, BCA è uguale, o maggiore di due retti. E' chiaro essere la somma degli tre angoli in A, B, e C del triangolo maggiore di due angoli retti. Se poi la somma degli angoli BAC, BCA è minore di due retti; sarà in tale caso l'angolo BAC minore dell'esterno BCD. S'intenda da C menato l'arco CE in modo, che l'angolo ECD sia uguale a BAC. Sarà la somma degli angoli EAC, ECA uguale a due retti. E perciò la somma de' lati AE, EC uguaglierà la mezza periferia (§ 63); e conseguentemente la somma di BE, EC sarà minore della mezza periferia. E quindi la somma degli angoli EBC, ECB sarà minore di due retti (§ 63). Per la qual cosa l'angolo ABC sarà maggiore di ECB, e conseguentemente la somma degli tre angoli ABC, BCA, BAC sarà maggiore della somma degli EAC, ECA, o sia di due retti. Ch'è quanto bisognava dimostrare.

CA.

C A P. II.

Si premettono alcuni principj teoretici riguardanti i coseni della somma, e della differenza di due angoli piani, o di due archi circolari.

T E O R. XII.

65. Sieno LOM un quadrante circolare, e MC, CD due archi qualunque. Dico che, mettendo l'arco DC == A, CM == B, e'l raggio, o sia seno massimo == R, farà

$$\cos. (A+B) = \frac{\cos. A \times \cos. B - \sin. A \times \sin. B}{R}$$

D I M O S T R A Z I O N E.

Si tiri il raggio OC, e da C, e D si calino CE, DG, DF perpendicolari le due prime su OM, e la terza su OC. Saranno i tre triangoli CEO, HGO, DFH simili tra essi; e faranno altresì DF == sen. A, OF == cos. A, CE == sen. B, OE == cos. B, DG == sen. (A+B), e OG == cos. (A+B). Essendo

$$OE : EC == DF : FH,$$

ovvero

$$\cos. B : \sin. B == \sin. A : FH.$$

D

Sarà

Sarà

$$FH == \frac{\text{sen. } A \times \text{sen. } B}{\text{cos. } B};$$

onde

$$OH == OF - FH == \text{cos. } A - \frac{\text{sen. } A \times \text{sen. } B}{\text{cos. } B} == \frac{\text{cos. } A \times \text{cos. } B - \text{sen. } A \times \text{sen. } B}{\text{cos. } B}.$$

E' in oltre

$$OC : OE == OH : OG,$$

ovvero

$$R : \text{cos. } B == \frac{\text{cos. } A \times \text{cos. } B - \text{sen. } A \times \text{sen. } B}{\text{cos. } B} : \text{cos. } (A+B).$$

Dunque

$$\text{cos. } (A+B) == \frac{\text{cos. } A \times \text{cos. } B - \text{sen. } A \times \text{sen. } B}{R}.$$

Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

T E O R. XIII.

66. Sieno LOM un quadrante circolare, e MD, MC due archi disuguali. Dico che, mettendo l'arco DM == A, MC == B, e'l raggio, o sia seno massimo == R, sarà

$$\text{cos. } (A-B) == \frac{\text{cos. } A \times \text{cos. } B + \text{sen. } A \times \text{sen. } B}{R}.$$

DI-

D I M O S T R A Z I O N E.

S'intenda fatta l'istessa preparazione del teorema prec.; faranno DG == sen. A, OG == cos. A, CE == sen. B, OE == cos. B, DF == sen. (A-B) == $\frac{\text{sen. } A \times \text{cos. } B - \text{sen. } B \times \text{cos. } A}{R}$ (§ 37 della Trig. pian.),

ed OF == cos. (A-B). Essendo

$$OE : EC == DF : FH,$$

ovvero

$$\text{cos. } B : \text{sen. } B == \frac{\text{sen. } A \times \text{cos. } B - \text{sen. } B \times \text{cos. } A}{R} : FH.$$

Sarà

$$FH == \frac{\text{sen. } A \times \text{sen. } B}{R} - \frac{(\text{sen. } B)^2 \times \text{cos. } A}{R \times \text{cos. } B}.$$

E' in oltre

$$OE : OG == OG : OH,$$

ovvero

$$\text{cos. } B : R == \text{cos. } A : OH.$$

Sicchè

$$OH == \frac{R \times \text{cos. } A}{\text{cos. } B} == \frac{R^2 \times \text{cos. } A}{R \times \text{cos. } B} == \frac{((\text{sen. } B)^2 + (\text{cos. } B)^2) \text{cos. } A}{R \times \text{cos. } B} + \frac{(\text{sen. } B)^2 \times \text{cos. } A}{R \times \text{cos. } B} + \frac{\text{cos. } A \times \text{cos. } B}{R}.$$

D 2

Per

Per la qual cosa

$$\begin{aligned} \cos. (A-B) &= OF = \frac{(\text{sen. } B)^2 \times \cos. A}{R \times \cos. B} + \frac{\cos. A \times \cos. B}{R} \\ &+ \frac{\text{sen. } A \times \text{sen. } B}{R} - \frac{(\text{sen. } B)^2 \times \cos. A}{R \times \cos. B} = \\ &\frac{\cos. A \times \cos. B + \text{sen. } A \times \text{sen. } B}{R} \end{aligned}$$

Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

67. Essendo

$$\begin{aligned} \cos. (A-B) &= \frac{\cos. A \times \cos. B + \text{sen. } A \times \text{sen. } B}{R}, \\ \cos. (A+B) &= \frac{\cos. A \times \cos. B - \text{sen. } A \times \text{sen. } B}{R}; \end{aligned}$$

faranno

$$\begin{aligned} \cos. (A-B) + \cos. (A+B) &= \frac{2 (\cos. A \times \cos. B)}{R}, \\ \cos. (A-B) - \cos. (A+B) &= \frac{2 (\text{sen. } A \times \text{sen. } B)}{R}, \end{aligned}$$

e conseguentemente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R (\cos. (A-B) + \cos. (A+B)) &= \cos. A \times \cos. B; \\ \frac{1}{2} R (\cos. (A-B) - \cos. (A+B)) &= \text{sen. } A \times \text{sen. } B. \end{aligned}$$

Or tali due ultime formole, poste $A+B = P$, e $A-B = Q$

$$= Q, \text{ e conseguentemente } A = \frac{P+Q}{2}, \text{ e } B = \frac{P-Q}{2},$$

si trasmutano nelle seguenti

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R (\cos. Q + \cos. P) &= \cos. \frac{P+Q}{2} \times \cos. \frac{P-Q}{2}, \\ \frac{1}{2} R (\cos. Q - \cos. P) &= \text{sen. } \frac{P+Q}{2} \times \text{sen. } \frac{P-Q}{2}. \end{aligned}$$

COROLLARIO II.

68. Quindi farà

$$\begin{aligned} \cos. Q + \cos. P &= \cos. \frac{P+Q}{2} \times \cos. \frac{P-Q}{2}, \\ \cos. Q - \cos. P &= \text{sen. } \frac{P+Q}{2} \times \text{sen. } \frac{P-Q}{2}. \end{aligned}$$

Ma essendo

$$\cos. \frac{P+Q}{2} : \text{sen. } \frac{P+Q}{2} = R : \text{tang. } \frac{P+Q}{2};$$

farà

$$\begin{aligned} \cos. \frac{P+Q}{2} &= \frac{R}{\text{tang. } \frac{P+Q}{2}}, \\ \text{sen. } \frac{P+Q}{2} &= \frac{R}{\text{tang. } \frac{P+Q}{2}}. \end{aligned}$$

E perciò

$$\begin{aligned} \cos. Q + \cos. P &= \frac{R^2}{\text{tang. } \frac{P+Q}{2} \times \text{tang. } \frac{P-Q}{2}}, \\ \cos. Q - \cos. P &= \frac{R^2}{\text{tang. } \frac{P+Q}{2} \times \text{tang. } \frac{P-Q}{2}}. \end{aligned}$$

Ed

Ed essendo di più

$$\text{tang. } \frac{P+Q}{2} : R == R : \text{cotang. } \frac{P+Q}{2},$$

e conseguentemente

$$\frac{R}{\text{tang. } \frac{P+Q}{2}} == \text{cotang. } \frac{P+Q}{2}.$$

Dunque

$$\frac{\text{cos. } Q + \text{cos. } P}{\text{cos. } Q - \text{cos. } P} == \frac{\text{cotang. } \frac{P+Q}{2}}{\text{tang. } \frac{P-Q}{2}}.$$

COROLLARIO III.

69. Si è dimostrato nel § 40 della Trig. pia. essere

$$\frac{1}{2} R (\text{sen. } (A+B) + \text{sen. } (A-B)) == \text{sen. } A \times \text{cos. } B,$$

$$\frac{1}{2} R (\text{sen. } (A+B) - \text{sen. } (A-B)) == \text{sen. } B \times \text{cos. } A.$$

Dunque; poste pure $A+B == P$, $A-B == Q$, e conseguentemente $A == \frac{P+Q}{2}$, $B == \frac{P-Q}{2}$, s'avranno

$$\frac{1}{2} R (\text{sen. } P + \text{sen. } Q) == \text{sen. } \frac{P+Q}{2} \times \text{cos. } \frac{P-Q}{2},$$

$$\frac{1}{2} R (\text{sen. } P - \text{sen. } Q) == \text{sen. } \frac{P-Q}{2} \times \text{cos. } \frac{P+Q}{2}.$$

CO.

COROLLARIO IV.

70. E perciò sarà

$$\frac{\text{sen. } P + \text{sen. } Q}{\text{sen. } P - \text{sen. } Q} == \frac{\text{sen. } \frac{P+Q}{2} \times \text{cos. } \frac{P-Q}{2}}{\text{cos. } \frac{P+Q}{2} \times \text{sen. } \frac{P-Q}{2}}.$$

Or

$$\frac{\text{sen. } \frac{P+Q}{2}}{\text{cos. } \frac{P+Q}{2}} == \frac{\text{tang. } \frac{P+Q}{2}}{R},$$

$$\frac{\text{cos. } \frac{P-Q}{2}}{\text{sen. } \frac{P-Q}{2}} == \frac{R}{\text{tang. } \frac{P-Q}{2}}.$$

Sicchè

$$\frac{\text{sen. } P + \text{sen. } Q}{\text{sen. } P - \text{sen. } Q} == \frac{\text{tang. } \frac{P+Q}{2}}{\text{tang. } \frac{P-Q}{2}}.$$

CAP.

C A P. III.

Delle proporzioni, che nascono dagli seni, dalle tangenti, ec. degli angoli de' triangoli sferici rettangoli, paragonati co' seni, colle tangenti, ec. de' lati di essi.

T E O R. XIV.

Fig. 13. 71. Sia ABC un triangolo sferico, rettangolo in A. Dico
 1.^o che il seno massimo sta al seno dell'ipotenusa, come il seno d'un angolo obliquo al seno del lato opposto al medesimo angolo; 2.^o che il seno massimo sta alla tangente dell'ipotenusa, come il coseno d'un angolo obliquo alla tangente del lato adiacente al medesimo angolo; e 3.^o che il seno massimo sta alla tangente d'un angolo obliquo, come il seno del lato adiacente al medesimo angolo alla tangente del lato opposto.

D I M O S T R A Z I O N E.

S'intendano dal centro O della sfera tirati i tre raggi OA, OB, OC. Saranno i tre archi AB, BC, CA misure degli tre angoli rettilinei AOB, BOC, COA. S'intendano di più nel settore AOB dal punto B tirata BP perpendicolare ad AO, nel settore AOC dal punto P tirata PQ perpendicolare ad OC, e congiunta la retta BQ. Sarà BP seno dell'arco AB; ed essendo l'angolo BAC retto, e conseguentemente il settore AOB perpendicolare al settore AOC (§ 26), l'istessa BP è perpendicolare al settore AOC; onde l'angolo BPQ è retto (§ 4 del tom. 4), e'l triangolo retti-

DELLA TRIG. SFERICA.

rettilineo BPQ è anche perpendicolare al settore AOC (§ 67 del tom. 4). E perciò OQ, come perpendicolare a PQ, è perpendicolare al triangolo BPQ, e conseguentemente alla retta BQ (§ 4 del tom. 4). Per la qual cosa BQ è seno dell'arco BC, e l'angolo rettilineo BQP, come angolo d'inclinazione de' due settori BOC, AOC, è uguale all'angolo sferico ACB (§ 26).
 Si metta il seno massimo == R.

I.

Essendo

$$BQ : BP == \text{sen. } BC : \text{sen. } AB,$$

e pel triangolo rettangolo BPQ,

$$BQ : BP == R : \text{sen. } BQP \\ == R : \text{sen. } BCA.$$

Sarà

$$R : \text{sen. } BC == \text{sen. } BCA : \text{sen. } AB.$$

Similmente si dimostra essere

$$R : \text{sen. } BC == \text{sen. } CBA : \text{sen. } AC.$$

II.

Essendo in oltre, presa OQ per raggio, QB tangente dell'angolo BOC, e PQ tangente dell'angolo AOC. Dunque

$$BQ : PQ == \text{tang. } BOC : \text{tang. } AOC \\ == \text{tang. } BC : \text{tang. } AC.$$

Ma pel triangolo rettangolo BPQ è pure

$$BQ : PQ == R : \text{cos. } BQP \\ == R : \text{cos. } BCA.$$

E

Sic-

Sicchè

$$R : \text{tang. } BC == \text{cof. } BCA : \text{tang. } AC.$$

Similmente si dimostra essere

$$R : \text{tang. } BC == \text{cof. } CBA : \text{tang. } AB.$$

III.

Essendo finalmente, presa OP per raggio, PQ seno dell'angolo AOC, e BP tangente dell'angolo AOB. Dunque

$$\begin{aligned} QP : PB &== \text{sen. } AOC : \text{tang. } AOB \\ &== \text{sen. } AC : \text{tang. } AB. \end{aligned}$$

Ma pel triangolo rettangolo BPQ è anche

$$\begin{aligned} QP : PB &== R : \text{tang. } BQP \\ &== R : \text{tang. } BCA. \end{aligned}$$

Sicchè

$$R : \text{tang. } BCA == \text{sen. } AC : \text{tang. } AB.$$

Similmente si dimostra essere

$$R : \text{tang. } CBA == \text{sen. } AB : \text{tang. } AC.$$

Ch'è quanto bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

72. Quindi, posta di qualunque triangolo sferico, ch'è ha un angolo retto, l'ipotenusa == I, e posti qualunque degli angoli obliqui == A, il lato opposto a un angolo obliquo == L, e l' lato adiacente == L'', s'avranno le tre seguenti proporzioni:

R :

$$\begin{aligned} R : \text{sen. } I &== \text{sen. } A : \text{sen. } L, \\ R : \text{tang. } I &== \text{cof. } A : \text{tang. } L'', \\ R : \text{tang. } A &== \text{sen. } L'' : \text{tang. } L. \end{aligned}$$

COROLLARIO II.

73. Essendo $R : \text{sen. } I == \text{sen. } A : \text{sen. } L$; saranno

$$\begin{aligned} \text{sen. } I &== \frac{R \times \text{sen. } L}{\text{sen. } A}, \\ \text{sen. } A &== \frac{R \times \text{sen. } L}{\text{sen. } I}, \\ \text{sen. } L &== \frac{\text{sen. } I \times \text{sen. } A}{R}. \end{aligned}$$

Sicchè delle tre grandezze I, A, L, cioè dell'ipotenusa, d'un angolo obliquo, e del lato opposto al medesimo angolo, datene due qualunque, si determina la terza; e tali determinazioni costituiscono le soluzioni di tre casi del probl., che insegna a sciogliere la Trigonometria relativamente agli triangoli rettangoli.

COROLLARIO III.

74. Essendo in oltre $R : \text{tang. } I == \text{cof. } A : \text{tang. } L''$; saranno

$$\begin{aligned} \text{tang. } I &== \frac{R \times \text{tang. } L''}{\text{cof. } A}, \\ \text{cof. } A &== \frac{R \times \text{tang. } L''}{\text{tang. } I}, \\ \text{tang. } L'' &== \frac{\text{tang. } I \times \text{cof. } A}{R}. \end{aligned}$$

Quindi delle tre grandezze I, A, L'', cioè dell'ipotenusa, d'un angolo obliquo, e del lato adiacente al medesimo

angolo, datene due qualunque, si determina la terza; e sì fatte determinazioni costituiscono le soluzioni di tre altri casi del detto probl..

C O R O L L A R I O IV.

75. Essendo finalmente $R : \text{tang. } A == \text{sen. } L'' : \text{tang. } L$; faranno

$$\text{tang. } A == \frac{R \times \text{tang. } L}{\text{sen. } L''},$$

$$\text{sen. } L'' == \frac{R \times \text{tang. } L}{\text{tang. } A},$$

$$\text{tang. } L == \frac{\text{tang. } A \times \text{sen. } L''}{R}.$$

Dunque delle tre grandezze A, L, L'' , cioè d'un angolo obbliquo, del lato opposto al medesimo angolo, e del lato adiacente, datene due qualunque, si determina la terza; e tali determinazioni costituiscono le soluzioni di tre altri casi dell'anzidetto probl.

A V V E R T I M E N T O.

76. Nel triangolo sferico rettangolo le parti, ch' esigono d'essere secondo il bisogno or l'una, or l'altra determinate, per l'angolo retto già noto, sono cinque, cioè i tre lati, e i due angoli obliqui; e si determina ciascuna di esse coll'ajuto d'una proporzione, in cui si trova ella combinata con due altre note, e conseguentemente date. Or tutte le combinazioni a tre a tre di sì fatte cinque parti, si riducono alle sei seguenti, cioè alle combinazioni 1.^a dell'ipotenusa, d'un angolo obbliquo, e del lato opposto al medesimo angolo; 2.^a dell'ipotenusa, d'un angolo obbliquo, e del lato adiacente all'istesso angolo; 3.^a d'un angolo obbliquo, e degli due lati; 4.^a dell'ipotenusa, e degli stessi due lati; 5.^a d'un lato, e degli due angoli obliqui; e 6.^a finalmente dell'ipotenusa, e degli stessi due angoli obliqui. Somministrando intanto ognuna di sì fatte combinazioni, compresa

presa in una proporzione, la soluzione di tre casi del probl., che insegna la Trigonometria a sciorre relativamente agli triangoli rettangoli; tutt'i casi di sì fatto probl. debbono essere 18. Ad ogni modo si riducono a 16; perchè tanto nella combinazione dell'ipotenusa, e degli due lati, quanto nell'altra dell'ipotenusa, e degli due angoli obliqui, i casi da sciorre sono realmente due, e non tre; valendo l'istesso per riguardo della prima il determinare l'un lato, che l'altro, e per riguardo della seconda il determinare l'un angolo obbliquo, che l'altro. Esposte intanto le tre proporzioni, comprendenti tre delle riferite combinazioni, conviene esporne tre altre, comprendenti le tre rimanenti combinazioni; acciò coll'ajuto di tutte le sei proporzioni, comprendenti le dette sei combinazioni, si possa sciorre relativamente agli triangoli rettangoli il suddetto probl. in tutt'i casi possibili. Perciò sia il

T E O R. XV.

77. Sia l'istesso triangolo sferico ABC , rettangolo in A . Dico 1.^o che il seno massimo sta al coseno d'un lato, come il coseno dell'altro lato al coseno dell'ipotenusa; 2.^o che il seno massimo sta al seno d'un angolo obbliquo, come il coseno del lato adiacente al medesimo angolo al coseno dell'altro angolo obbliquo; e 3.^o finalmente che il seno massimo sta alla tangente d'un angolo obbliquo, come il coseno dell'ipotenusa alla contangente dell'altro angolo obbliquo.

D I M O S T R A Z I O N E.

S'intendano gli archi CA, CB prolungati in F , e D , finchè CF, CD sieno quadranti; e per F , e D s'intenda menato l'arco FE di cerchio massimo, che interseca AB prolungato in E . Saranno gli angoli in F , e D retti (§ 43); e sarà FD misura dell'angolo ACB (§ 29). Ed essendo retti gli angoli EFA, EAF , saranno EA, EF archi di quadranti (§ 43), ed AF misura dell'angolo AEF (§ 29). Sicchè del triangolo sferico BDE , rettangolo in D , il lato BD manca dall'arco di quadrante per BC , l'ipotenusa BE man-

manca pure dall'arco di quadrante per AB, e'l lato DE manca anche dall'arco di quadrante per FD, che misura l'angolo sferico in C.

Si metta il seno massimo == R.

I.

Essendo per la 1^a parte del teor. prec.

$$R : \text{sen. BE} == \text{sen. DEB} : \text{sen. BD.}$$

Ed essendo

$$\begin{aligned} \text{sen. BE} &== \text{cos. AB}, \\ \text{sen. DEB} &== \text{sen. AF} == \text{cos. AC}, \\ \text{sen. BD} &== \text{cos. BC}. \end{aligned}$$

Sarà

$$R : \text{cos. AB} == \text{cos. AC} : \text{cos. BC.}$$

II.

Essendo pure per la 1^a part. del teor. prec.

$$R : \text{sen. DBE} == \text{sen. BE} : \text{sen. DE.}$$

Ed essendo

$$\begin{aligned} \text{l'angolo DBE} &== \text{ABC} (\S 25), \\ \text{sen. BE} &== \text{cos. AB}, \\ \text{sen. DE} &== \text{cos. FD} == \text{cos. ACB} : \end{aligned}$$

Sarà

$$R : \text{sen. ABC} == \text{cos. AB} : \text{cos. ACB.}$$

Simil-

Similmente si dimostra essere

$$R : \text{sen. ACB} == \text{cos. AC} : \text{cos. ABG.}$$

III.

Essendo finalmente per la 3^a parte del teor. prec.

$$R : \text{tang. DBE} == \text{sen. BD} : \text{tang. DE.}$$

Ed essendo

$$\begin{aligned} \text{l'angolo DBE} &== \text{ABC}, \\ \text{sen. BD} &== \text{cos. BC}, \\ \text{tang. DE} &== \text{cotang. FD} == \text{cotang. ACB.} \end{aligned}$$

Sarà

$$R : \text{tang. ABC} == \text{cos. BC} : \text{cotang. ACB.}$$

Similmente si dimostra essere

$$R : \text{tang. ACB} == \text{cos. BC} : \text{cotang. ABC.}$$

Ch'è quanto bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

78. Quindi, posta di qualunque triangolo sferico, che ha un angolo retto, l'ipotenusa == I, e posti uno degli angoli obliqui == A, l'altro == A'', il lato opposto all'angolo A == L, e'l lato adiacente == L''; s' avranno le tre seguenti proporzioni:

$$R : \text{cos. L} == \text{cos. L''} : \text{cos. I,}$$

$$R : \text{sen.}$$

$$\begin{aligned} & \text{T R A T T A T O} \\ R : \text{sen. } A & == \text{cos. } L'' : \text{cos. } A'', \\ R : \text{tang. } A & == \text{cos. } I : \text{cotang. } A''. \end{aligned}$$

COROLLARIO II.

79. Essendo $R : \text{cos. } L == \text{cos. } L'' : \text{cos. } I$; farà nno

$$\begin{aligned} \text{cos. } L & == \frac{R \times \text{cos. } I}{\text{cos. } L''}, \\ \text{cos. } L'' & == \frac{R \times \text{cos. } I}{\text{cos. } L}, \\ \text{cos. } I & == \frac{\text{cos. } L \times \text{cos. } L''}{R}. \end{aligned}$$

Delle quali formole le due prime non differiscono realmente tra esse; perchè, non avendo in esse i lati del triangolo rapporto ad angoli, è indifferente che L esprima l'uno, o l'altro di tali lati. Quindi delle tre grandezze I, L, L'' , cioè dell'ipotenusa, e de' due lati, data l'ipotenusa, e dato uno de' lati, si determina l'altro lato, e dati i due lati, si determina l'ipotenusa; e tali determinazioni costituiscono le soluzioni di due altri casi del probl., che insegna a sciogliere la Trigonometria relativamente agli angoli rettangoli.

COROLLARIO III.

80. Essendo in oltre $R : \text{sen. } A == \text{cos. } L'' : \text{cos. } A''$; faranno

$$\begin{aligned} \text{sen. } A & == \frac{R \times \text{cos. } A''}{\text{cos. } L''}, \\ \text{cos. } L'' & == \frac{R \times \text{cos. } A''}{\text{sen. } A}, \\ \text{cos. } A'' & == \frac{\text{sen. } A \times \text{cos. } L''}{R}. \end{aligned}$$

Quindi delle tre grandezze A, L'', A'' , cioè d'un angolo obliquo,

DELLA TRIG. SFERICA.

quo, del lato adiacente all'istesso angolo, e dell'altr'angolo obliquo, datene due qualunque, si determina la terza; e sì fatte determinazioni costituiscono le soluzioni di tre altri casi dell'anzidetto probl.

COROLLARIO IV.

81. Essendo finalmente $R : \text{tang. } A == \text{cos. } I : \text{cotang. } A''$; faranno

$$\begin{aligned} \text{tang. } A & == \frac{R \times \text{cotang. } A''}{\text{cos. } I}, \\ \text{cos. } I & == \frac{R \times \text{cotang. } A''}{\text{tang. } A}, \\ \text{cotang. } A'' & == \frac{\text{tang. } A \times \text{cos. } I}{R}. \end{aligned}$$

Delle quali formole tanto la prima, quanto l'ultima ci mena alla determinazione d'ambi gli angoli obliqui; perchè non avendo in esse gli angoli obliqui rapporto agli lati, è indifferente che A esprima l'uno, o l'altro di sì fatti angoli: onde tali due formole equivalgono a una, menandoci alle medesime determinazioni, sebbene per vie diverse. E quindi delle tre grandezze I, A, A'' , cioè dell'ipotenusa, e degli due angoli obliqui, data l'ipotenusa, e dato uno degli angoli obliqui, si determina l'altro angolo obliquo; e dati i due angoli obliqui, si determina l'ipotenusa; e tali determinazioni costituiscono le soluzioni degli ultimi due casi del detto problema relativamente agli triangoli sferici rettangoli.

AVVERTIMENTO I.

82. S'intendano compiti i mezzi cerchi CAH, CBH ; s'avrà il triangolo sferico BAH , rettangolo in A , coll'angolo obliquo $AHB == ACB$ (§ 28). Onde i triangoli BAC, BAH , rettangoli ambidue in A , hanno il lato comune AB ,
F ed

ed uguali gli angoli ACB , AHB opposti a tale lato. Sicchè se nel triangolo rettangolo saranno dati il lato AB , e l'angolo opposto, e in conseguenza di tali dati si cercherà ciascuna delle parti rimanenti: come i dati appartengono sì al triangolo BAC , che al triangolo BAH ; così le parti, che vengono determinate, possono appartenere sì all'uno, che all'altro triangolo. E perciò si possono determinare per ipotenusa sì BC , che il suo complemento BH alla mezza periferia; per l'altro lato sì AC , che il suo complemento AH alla mezza periferia; e per l'altr'angolo obbliquo sì ABC , che il suo conseguente ABH . Quindi i tre casi del detto probl. relativamente agli triangoli rettangoli, qualora i dati sono un lato, e l'angolo opposto, si dicono *casì ambigui*; e conviene badarvi, acciò non si prendano per le parti cercate quelle, che non corrispondono al bisogno.

A V V E R T I M E N T O II.

83. Ecco esposto quanto bisogna per isciorre relativamente agli triangoli sferici rettangoli in tutt' i casi possibili il probl., che insegna la Trigonometria a sciore. Resta che s'esponga quanto è necessario per poter isciorre in tutt' i casi possibili l'istesso probl. relativamente a' triangoli sferici obliquangoli. Perciò soggiugniamo il seguente

C A P. IV.

Delle proporzioni, che nascono dagli
seni, dalle tangenti, ec. degli an-
goli de' triangoli sferici obbli-
quangoli, paragonati co'
seni, colle tangenti,
ec. de' lati di essi.

T E O R. XVI.

84. Sia ABC qualunque triangolo sferico obliquangolo, Fig. 14, e BD sia l'arco di cerchio massimo, menato dal punto B perpendicolare ad AC . Dico 1° che i seni degli angoli del triangolo ABC sono tra essi nella ragione de' seni de' lati opposti; 2° che i coseni degli angoli ABD , CBD sono nella ragione delle tangenti degli archi BC , BA ; e 3° che le tangenti degli angoli in A , e C sono nella ragione de' seni degli archi CD , DA .

D I M O S T R A Z I O N E.

I.

Essendo pel § 71

$$\begin{aligned} R : \text{sen. } AB &= \text{sen. } BAC : \text{sen. } BD, \\ R : \text{sen. } BC &= \text{sen. } BCA : \text{sen. } BD. \end{aligned}$$

Saranno

$$\begin{aligned} R \times \text{sen. } BD &= \text{sen. } AB \times \text{sen. } BAC, \\ R \times \text{sen. } BD &= \text{sen. } BC \times \text{sen. } BCA. \end{aligned}$$

F 2

On.

Onde

$$\text{sen. } AB \times \text{sen. } BAC == \text{sen. } BC \times \text{sen. } ACB.$$

E perciò

$$\text{sen. } AB : \text{sen. } BC == \text{sen. } ACB : \text{sen. } BAC.$$

Similmente si dimostra essere

$$\begin{aligned} \text{sen. } AB : \text{sen. } AC &== \text{sen. } ACB : \text{sen. } ABC, \\ \text{sen. } AC : \text{sen. } BC &== \text{sen. } ABC : \text{sen. } BAC. \end{aligned}$$

II.

Essendo in oltre pel § 71

$$\begin{aligned} R : \text{cos. } ABD &== \text{tang. } AB : \text{tang. } BD, \\ R : \text{cos. } CBD &== \text{tang. } BC : \text{tang. } BD. \end{aligned}$$

Saranno

$$\begin{aligned} R \times \text{tang. } BD &== \text{cos. } ABD \times \text{tang. } AB, \\ R \times \text{tang. } BD &== \text{cos. } CBD \times \text{tang. } BC. \end{aligned}$$

Dunque

$$\text{cos. } ABD \times \text{tang. } AB == \text{cos. } CBD \times \text{tang. } BC.$$

E perciò

$$\text{cos. } ABD : \text{cos. } CBD == \text{tang. } BC : \text{tang. } AB.$$

III.

III.

Essendo finalmente pel § 71

$$\begin{aligned} R : \text{tang. } BAC &== \text{sen. } AD : \text{tang. } BD, \\ R : \text{tang. } BCA &== \text{sen. } CD : \text{tang. } BD. \end{aligned}$$

Saranno

$$\begin{aligned} R \times \text{tang. } BD &== \text{sen. } AD \times \text{tang. } BAC, \\ R \times \text{tang. } BD &== \text{sen. } CD \times \text{tang. } BCA, \end{aligned}$$

Sicchè

$$\text{sen. } AD \times \text{tang. } BAC == \text{sen. } CD \times \text{tang. } BCA.$$

E quindi

$$\text{tang. } BAC : \text{tang. } BCA == \text{sen. } CD : \text{sen. } AD.$$

Ch'è quanto bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

85. Essendo

$$\begin{aligned} \text{sen. } A : \text{sen. } B &== \text{sen. } BC : \text{sen. } AC, \\ \text{sen. } A : \text{sen. } C &== \text{sen. } BC : \text{sen. } AB, \\ \text{sen. } B : \text{sen. } C &== \text{sen. } AC : \text{sen. } AB. \end{aligned}$$

S' avranno

$$1. \quad \text{sen. } A == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen. } B \times \text{sen. } BC}{\text{sen. } AC} \\ \frac{\text{sen. } C \times \text{sen. } BC}{\text{sen. } AB} \end{array} \right.$$

$$2. \quad \text{sen. } B == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen. } A \times \text{sen. } AC}{\text{sen. } BC} \\ \frac{\text{sen. } C \times \text{sen. } AC}{\text{sen. } AB} \end{array} \right.$$

$$3. \quad \text{sen. } C == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen. } A \times \text{sen. } AB}{\text{sen. } BC} \\ \frac{\text{sen. } B \times \text{sen. } AB}{\text{sen. } AC} \end{array} \right.$$

$$4. \quad \text{sen. } AB == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen. } C \times \text{sen. } BC}{\text{sen. } A} \\ \frac{\text{sen. } C \times \text{sen. } AC}{\text{sen. } B} \end{array} \right.$$

$$5. \quad \text{sen. } BC == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen. } A \times \text{sen. } AC}{\text{sen. } B} \\ \frac{\text{sen. } A \times \text{sen. } AB}{\text{sen. } C} \end{array} \right.$$

sen.

$$6. \quad \text{sen. } AC == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen. } B \times \text{sen. } BC}{\text{sen. } A} \\ \frac{\text{sen. } B \times \text{sen. } AB}{\text{sen. } C} \end{array} \right.$$

T E O R. XVII.

86. Sia l'istesso, che s'è supposto nel teorema precedente. Dico 1.^o che i coseni degli archi AD, DC sono nella ragione de' coseni de' lati AB, BC; e 2.^o che i seni degli angoli ABD, CBD sono nella ragione de' coseni degli angoli BAD, BCD.

D I M O S T R A Z I O N E.

I.

Essendo pel § 77

$$\begin{aligned} R : \text{cos. } BD &== \text{cos. } AD : \text{cos. } AB, \\ R : \text{cos. } BD &== \text{cos. } DC : \text{cos. } BC. \end{aligned}$$

Sarà

$$\text{cos. } AD : \text{cos. } DC == \text{cos. } AB : \text{cos. } BC.$$

II.

Essendo in oltre pel § 77

$$\begin{aligned} R : \text{cos. } BD &== \text{sen. } ABD : \text{cos. } BAD, \\ R : \text{cos. } BD &== \text{sen. } CBD : \text{cos. } BCD. \end{aligned}$$

Sa-

Sarà

$$\text{sen. ABD} : \text{sen. CBD} == \text{cos. BAD} : \text{cos. BCD}.$$

Ch'è quanto bisognava dimostrare.

C O R O L L A R I O I.

87. Essendo

$$\text{cos. AD} : \text{cos. CD} == \text{cos. AB} : \text{cos. BG}.$$

Sarà

$$\text{cos. BC} == \frac{\text{cos. AB} \times \text{cos. CD}}{\text{cos. AD}}.$$

Ma

$$\text{cos. CD} == \text{cos. } \pm (\text{AC} - \text{AD}) == \frac{\text{cos. AC} \times \text{cos. AD} + \text{sen. AC} \times \text{sen. AD}}{R} \quad (\S 66).$$

Dunque

$$\text{cos. BC} ==$$

$$\frac{\text{cos. AB} \times \text{cos. AC} \times \text{cos. AD} + \text{cos. AB} \times \text{sen. AC} \times \text{sen. AD}}{R \times \text{cos. AD}}$$

$$== \frac{\text{cos. AB} \times \text{cos. AC}}{R} + \frac{\text{cos. AB} \times \text{sen. AC}}{R} \times \frac{\text{sen. AD}}{\text{cos. AD}}$$

$$== \frac{R \times \text{cos. AB} \times \text{cos. AC} + \text{cos. AB} \times \text{sen. AC} \times \text{tang. AD}}{R^2}.$$

Es-

Essendo di più pel § 71

$$R : \text{tang. AB} == \text{cos. A} : \text{tang. AD}.$$

Sarà

$$\text{tang. AD} == \frac{\text{cos. A}}{R} \times \text{tang. AB} == \frac{\text{cos. A} \times \text{sen. AB}}{\text{cos. AB}}.$$

Sicchè

$$\text{cos. BC} ==$$

$$\frac{R \times \text{cos. AB} \times \text{cos. AC} + \text{cos. A} \times \text{sen. AC} \times \text{sen. AB}}{R^2}.$$

Per la qual cosa

$$\text{cos. A} ==$$

$$\frac{R^2 \times \text{cos. BC} - R \times \text{cos. AB} \times \text{cos. AC}}{\text{sen. AC} \times \text{sen. AB}}.$$

C O R O L L A R I O II.

88. Essendo in oltre pel § 86

$$\text{sen. CBD} : \text{sen. ABD} == \text{cos. DCB} : \text{cos. BAD}.$$

Sarà

$$\text{cos. BAD} == \frac{\text{cos. DCB} \times \text{sen. ABD}}{\text{sen. CBD}}.$$

G

Ma

Ma

$$\frac{\text{sen. ABD} == \text{sen. (ABC} \mp \text{CBD)} == \text{sen. ABC} \times \text{cos. CBD} \mp \text{sen. CBD} \times \text{cos. ABC}}{R}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \text{cos. BAD} &== \text{cos. A} == \\ \frac{\text{sen. ABC} \times \text{cos. DCB} \times \text{cos. CBD} \mp \text{sen. CBD} \times \text{cos. DCB} \times \text{cos. ABC.}}{R \times \text{sen. CBD}} \\ &== \frac{\text{sen. ABC} \times \text{cos. DCB}}{\text{tang. CBD}} \mp \frac{\text{cos. DCB} \times \text{cos. ABC}}{R} \end{aligned}$$

Essendo di più pel § 77

$$R : \text{tang. CBD} == \text{cos. BC} : \text{cotang. DCB,}$$

ovvero

$$R : \text{tang. CBD} == \text{cos. BC} : \frac{R \times \text{cos. DCB}}{\text{sen. DCB}}.$$

Sarà

$$\text{tang. CBD} == \frac{R^2 \times \text{cos. DCB}}{\text{sen. DCB} \times \text{cos. BC}}$$

Sic.

Sicchè

$$\text{cos. A} ==$$

$$\begin{aligned} &\frac{\text{sen. ABC} \times \text{sen. DCB} \times \text{cos. BC} \mp \text{cos. DCB} \times \text{cos. ABC}}{R^2} \\ &== \frac{\text{sen. ABC} \times \text{sen. DCB} \times \text{cos. BC} \mp R \times \text{cos. DCB} \times \text{cos. ABC.}}{R^2} \end{aligned}$$

Avendo finalmente i due angoli DCB, BCA, anche nel caso della Fig. 15, l'istesso seno, e l'istesso coseno; e chiamando gli angoli del triangolo ABC colle lettere poste ne' vertici di essi; sarà

$$\text{cos. A} ==$$

$$\frac{\text{sen. B} \times \text{sen. C} \times \text{cos. BC} \mp R \times \text{cos. B} \times \text{cos. C}}{R^2}.$$

COROLLARIO III.

89. Quindi

$$\text{cos. A} == \left\{ \begin{aligned} &\frac{R^2 \times \text{cos. BC} - R \times \text{cos. AB} \times \text{cos. AC}}{\text{sen. AB} \times \text{sen. AC}}, \\ &\frac{\text{sen. B} \times \text{sen. C} \times \text{cos. BC} \mp R \times \text{cos. B} \times \text{cos. C}}{R^2} \end{aligned} \right.$$

Similmente si dimostra essere

$$\cos. B == \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^2 \times \cos. AC - R \times \cos. AB \times \cos. BC}{\sin. AB \times \sin. BC}, \\ \frac{\sin. A \times \sin. C \times \cos. AC \pm R \times \cos. A \times \cos. C}{R^2} \end{array} \right.$$

$$\cos. C == \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^2 \times \cos. AB - R \times \cos. AC \times \cos. BC}{\sin. AC \times \sin. BC}, \\ \frac{\sin. A \times \sin. B \times \cos. AB \mp R \times \cos. A \times \cos. B}{R^2} \end{array} \right.$$

COROLLARIO IV.

90. E quindi dalle formole precedenti di $\cos. C$, $\cos. A$, $\cos. B$ si ricavano le seguenti, cioè

$$\cos. AB == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos. C \times \sin. AC \times \sin. BC + R \times \cos. AC \times \cos. BC}{R^2}, \\ \frac{R^2 \times \cos. C \pm R \times \cos. A \times \cos. B}{\sin. A \times \sin. B}, \end{array} \right.$$

$$\cos. BC == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos. A \times \sin. AB \times \sin. AC + R \times \cos. AB \times \cos. AC}{R^2}, \\ \frac{R^2 \times \cos. A \pm R \times \cos. B \times \cos. C}{\sin. B \times \sin. C} \end{array} \right.$$

$\cos.$

$$\cos. AC == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos. B \times \sin. AB \times \sin. BC + R \times \cos. AB \times \cos. BC}{R^2}, \\ \frac{R^2 \times \cos. B \pm R \times \cos. A \times \cos. C}{\sin. A \times \sin. C} \end{array} \right.$$

COROLLARIO V.

91. Essendo di vantaggio pel § 84

$$\tan. A : \tan. C == \sin. CD : \sin. AD.$$

Sarà

$$\tan. A == \frac{\tan. C \times \sin. CD}{\sin. AD}.$$

Ma

$$\sin. AD == \sin. (AC \mp DC == \frac{\sin. AC \times \cos. DC \mp \sin. DC \times \cos. AC}{R}.$$

Dunque

$$\tan. A == \frac{R \times \tan. C \times \sin. DC}{\sin. AC \times \cos. DC \mp \sin. DC \times \cos. AC} == \frac{R \times \tan. C}{\sin. AC \times \frac{R}{\tan. DC} \mp \cos. AC}$$

E in

E' in oltre

$$\text{tang. } C == \frac{\text{sen. } C}{\text{cos. } C} \times R;$$

Ed essendo pel § 71

$$R : \text{cos. } C == \text{tang. } BC : \text{tang. } CD;$$

è pure

$$\text{tang. } DC == \frac{\text{cos. } C \times \text{tang. } BC}{R}.$$

Sicchè

$$\begin{aligned} \text{tang. } A &== \frac{R^2 \times \frac{\text{sen. } C}{\text{cos. } C}}{\text{sen. } AC \times \frac{R^2}{\text{cos. } C \times \text{tang. } BC} \mp \text{cos. } AC} \\ &== \frac{R^2 \times \text{sen. } C}{\text{sen. } AC \times \text{cotang. } BC \mp \text{cos. } AC \times \text{cos. } C}; \end{aligned}$$

Similmente si dimostra essere

$$\text{tang. } A == \frac{R^2 \times \text{sen. } B}{\text{sen. } AB \times \text{cotang. } BC \mp \text{cos. } B \times \text{cos. } AB}$$

CO.

COROLLARIO VI.

92. Quindi

$$\text{tang. } A == \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^2 \times \text{sen. } C}{\text{sen. } AC \times \text{cotang. } BC \mp \text{cos. } C \times \text{cos. } AC} \\ \frac{R^2 \times \text{sen. } B}{\text{sen. } AB \times \text{cotang. } BC \mp \text{cos. } B \times \text{cos. } AB} \end{array} \right.$$

Similmente si trova essere

$$\text{tang. } B == \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^2 \times \text{sen. } A}{\text{sen. } AB \times \text{cotang. } AC \mp \text{cos. } A \times \text{cos. } AB} \\ \frac{R^2 \times \text{sen. } C}{\text{sen. } BC \times \text{cotang. } AC \mp \text{cos. } C \times \text{cos. } BC} \end{array} \right.$$

$$\text{tang. } C == \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^2 \times \text{sen. } A}{\text{sen. } AC \times \text{cotang. } AB \mp \text{cos. } A \times \text{cos. } AC} \\ \frac{R^2 \times \text{sen. } B}{\text{sen. } BC \times \text{cotang. } AB \mp \text{cos. } B \times \text{cos. } BC} \end{array} \right.$$

COROLLARIO VII.

93. E quindi, essendo la cotangente d'ogni angolo uguale al quadrato del seno massimo diviso per la sua tangente, faranno

sen.

$$\cot. A == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen. } AC \times \cot. BC \mp \text{cos. } C \times \text{cos. } AC}{\text{sen. } C} \\ \frac{\text{sen. } AB \times \cot. BC \mp \text{cos. } B \times \text{cos. } AB}{\text{sen. } B} \end{array} \right.$$

$$\cot. B == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen. } AB \times \cot. AC \mp \text{cos. } A \times \text{cos. } AB}{\text{sen. } A} \\ \frac{\text{sen. } BC \times \cot. AC \mp \text{cos. } C \times \text{cos. } BC}{\text{sen. } C} \end{array} \right.$$

$$\cot. C == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen. } AC \times \cot. AB \mp \text{cos. } A \times \text{cos. } AC}{\text{sen. } A} \\ \frac{\text{sen. } BC \times \cot. AB \mp \text{cos. } B \times \text{cos. } BC}{\text{sen. } B}; \end{array} \right.$$

ovvero, essendo il coseno d'un angolo, diviso pel suo seno, uguale alla cotangente dell'istesso angolo, diviso pel seno massimo, saranno

$$\cot. A == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen. } AC \times \cot. BC}{\text{sen. } C} \mp \frac{\cot. C \times \text{cos. } AC}{R} \\ \frac{\text{sen. } AB \times \cot. BC}{\text{sen. } B} \mp \frac{\cot. B \times \text{cos. } AB}{R} \end{array} \right.$$

sen.

$$\cot. B == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen. } AB \times \cot. AC}{\text{sen. } A} \mp \frac{\cot. A \times \text{cos. } AB}{R} \\ \frac{\text{sen. } BC \times \cot. AC}{\text{sen. } C} \mp \frac{\cot. C \times \text{cos. } BC}{R} \end{array} \right.$$

$$\cot. C == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen. } AC \times \cot. AB}{\text{sen. } A} \mp \frac{\cot. A \times \text{cos. } AC}{R} \\ \frac{\text{sen. } BC \times \cot. AB}{\text{sen. } B} \mp \frac{\cot. B \times \text{cos. } BC}{R} \end{array} \right.$$

COROLLARIO VIII.

94. E finalmente per le formole del § 92, cioè di tang. C, tang. A, tang. B si hanno le seguenti

$$\cot. AB == \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^2 \times \text{sen. } A \pm \text{tang. } C \times \text{cos. } A \times \text{cos. } AC}{\text{tang. } C \times \text{sen. } AC} \\ \frac{R^2 \times \text{sen. } B \pm \text{tang. } C \times \text{cos. } B \times \text{cos. } BC}{\text{tang. } C \times \text{sen. } BC} \end{array} \right.$$

$$\cot. BC == \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^2 \times \text{sen. } C \pm \text{tang. } A \times \text{cos. } C \times \text{cos. } AC}{\text{tang. } A \times \text{sen. } AC} \\ \frac{R^2 \times \text{sen. } B \pm \text{tang. } A \times \text{cos. } B \times \text{cos. } AB}{\text{tang. } A \times \text{sen. } AB} \end{array} \right.$$

H

R^o

$$\cot. AC == \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^2 \times \text{sen. } A \pm \text{tang. } B \times \text{cof. } A \times \text{cof. } AB}{\text{tang. } B \times \text{sen. } AB} \\ \frac{R^2 \times \text{sen. } C \pm \text{tang. } B \times \text{cof. } C \times \text{cof. } BC}{\text{tang. } B \times \text{sen. } BC} \end{array} \right.$$

E conseguentemente, essendo il quadrato del seno massimo, diviso per la tangente di qualunque angolo, uguale alla cotangente dell'istesso angolo, faranno

$$\cot. AB == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cot. C \times \text{sen. } A \pm \text{cof. } A \times \text{cof. } AC}{\text{sen. } AC} \\ \frac{\cot. C \times \text{sen. } B \pm \text{cof. } B \times \text{cof. } BC}{\text{sen. } BC} \end{array} \right.$$

$$\cot. BC == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cot. A \times \text{sen. } C \pm \text{cof. } C \times \text{cof. } AC}{\text{sen. } AC} \\ \frac{\cot. A \times \text{sen. } B \pm \text{cof. } B \times \text{cof. } AB}{\text{sen. } AB} \end{array} \right.$$

$$\cot. AC == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cot. B \times \text{sen. } A \pm \text{cof. } A \times \text{cof. } AB}{\text{sen. } AB} \\ \frac{\cot. B \times \text{sen. } C \pm \text{cof. } C \times \text{cof. } BC}{\text{sen. } BC} \end{array} \right.$$

E

E perciò faranno

$$\text{tang. } AB == \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^2 \times \text{sen. } AC}{\cot. C \times \text{sen. } A \pm \text{cof. } A \times \text{cof. } AC} \\ \frac{R^2 \times \text{sen. } BC}{\cot. C \times \text{sen. } B \pm \text{cof. } B \times \text{cof. } BC} \end{array} \right.$$

$$\text{tang. } BC == \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^2 \times \text{sen. } AC}{\cot. A \times \text{sen. } C \pm \text{cof. } C \times \text{cof. } AC} \\ \frac{R^2 \times \text{sen. } AB}{\cot. A \times \text{sen. } B \pm \text{cof. } B \times \text{cof. } AB} \end{array} \right.$$

$$\text{tang. } AC == \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^2 \times \text{sen. } AB}{\cot. B \times \text{sen. } A \pm \text{cof. } A \times \text{cof. } AB} \\ \frac{R^2 \times \text{sen. } BC}{\cot. B \times \text{sen. } C \pm \text{cof. } C \times \text{cof. } BC} \end{array} \right.$$

E faranno, poste nelle formole precedenti in vece de' cose-
ni degli angoli, divisi per gli seni, le cotangenti de' medesi-
mi angoli divise pel seno massimo

$$\cot. AB == \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cot. C \times \text{sen. } A}{\text{sen. } AC} \pm \frac{\text{cof. } A \times \cot. AC}{R} \\ \frac{\cot. C \times \text{sen. } B}{\text{sen. } BC} \pm \frac{\text{cof. } B \times \cot. BC}{R} \end{array} \right.$$

H 2

cot.

$$\cot. BC == \begin{cases} \frac{\cot. A \times \text{sen. } C}{\text{sen. } AC} \pm \frac{\cos. C \times \cot. AC}{R} \\ \frac{\cot. A \times \text{sen. } B}{\text{sen. } AB} \pm \frac{\cos. B \times \cot. AB}{R} \end{cases}$$

$$\cot. AC == \begin{cases} \frac{\cot. B \times \text{sen. } A}{\text{sen. } AB} \pm \frac{\cos. A \times \cot. AB}{R} \\ \frac{\cot. B \times \text{sen. } C}{\text{sen. } BC} \pm \frac{\cos. C \times \cot. BC}{R} \end{cases}$$

A V V E R T I M E N T O I.

95. Dovendosi per riguardo de' triangoli obbliquangoli da tre parti di essi rilevare le determinazioni delle tre altre rimanenti: è facile ad intendere essere tanti i casi del probl., che insegna a sciorre la Trigonometria relativamente a' triangoli obbliquangoli, quanti ne dinota il triplo delle combinazioni a tre a tre, che delle sei parti de' detti triangoli far si possono. Or tali combinazioni si riducono a sei, cioè alle combinazioni 1° di due lati, e d'un angolo opposto a uno di sì fatti lati; 2° di due lati, e dell'angolo compreso dagli medesimi lati; 3° di due angoli, e d'un lato opposto a uno di sì fatti angoli; 4° di due angoli, e del lato da essi compreso; 5° di tutti e tre i lati; e 6° finalmente di tutti e tre gli angoli. Quindi il numero de' detti casi è 18; ma si riduce a 16; perchè tanto nella combinazione di due lati, e dell'angolo da essi compreso, quanto nell'altra di due angoli, e del lato compreso dagli medesimi angoli, i casi da sciorre sono realmente due, e non tre; valendo l'istesso per riguardo della prima il determinare l'uno, che l'altro de' rimanenti angoli, e per riguardo della seconda il determinare l'uno, o l'altro de' rimanenti lati.

AV-

A V V E R T I M E N T O II.

96. Si noti che, qualora il triangolo ABC ha il lato AB minore del quadrante, il lato BC minore di AB, e l'angolo in A acuto, per B si può menare l'arco BE di cerchio massimo uguale a BC; e s'avrà l'angolo BEC uguale a BCE (§ 37); onde l'angolo BEA è uguale al conseguente di BCA. Or se in tale caso vengono dati il lato AB, il lato BC, e l'angolo in A, e si vogliono in conseguenza di tali dati determinare le parti rimanenti del triangolo: come tali dati appartengono sì al triangolo ABC, che al triangolo ABE; così le parti rimanenti si possono determinare e relativamente all'uno, e relativamente all'altro triangolo. Quindi i tre casi del problema, che insegna la Trigonometria a sciorre relativamente a' triangoli obbliquangoli, qualora i dati sono i già detti, e il triangolo ha le dette condizioni, si dicono *casi ambigui*; e conviene nella pratica badarvi, acciò non si prendano per le parti cercate quelle, che non corrispondono al bisogno.

A V V E R T I M E N T O III.

97. Si noti ancora che per isciorre i casi, qualora i dati costituiscono le quattro prime suddette combinazioni, sono sufficientissimi i principj già stabiliti, come si conoscerà nel cap. seguente; ma per gli altri casi, qualora i dati costituiscono le due altre combinazioni, v'abbisognano altri principj, che l'anderemo qui in seguito soggiugnendo. Perciò sia il

T E O R. XVIII.

98. Sia l'istesso, che s'è supposto nel teo. 16. Dico essere

$$\text{re cot. } \frac{AB+BC}{2} : \text{tan. } \frac{AB-BC}{2} == \text{cot. } \frac{AD+DC}{2} : \text{tang. } \frac{AD-DC}{2}$$

DI-

T R A T T A T O
D I M O S T R A Z I O N E.

Imperciocchè, essendo pel § 86

$$\cos. AB : \cos. BC == \cos. AD : \cos. DC,$$

farà

$$\cos. AB + \cos. BC : \cos. AB - \cos. BC ==$$

$$\cos. AD + \cos. DC : \cos. AD - \cos. DC;$$

e perciò

$$\frac{\cos. AB + \cos. BC}{\cos. AB - \cos. BC} == \frac{\cos. AD + \cos. DC}{\cos. AD - \cos. DC}.$$

Ma pel § 68

$$\frac{\cos. AB + \cos. BC}{\cos. AB - \cos. BC} == \frac{\cot. \frac{AB + BC}{2}}{\tan. \frac{AB - BC}{2}},$$

$$\frac{\cos. AD + \cos. DC}{\cos. AD - \cos. DC} == \frac{\cot. \frac{AD + DC}{2}}{\tan. \frac{AD - DC}{2}}.$$

Dun-

Dunque

$$\frac{\cot. \frac{AB + BC}{2}}{\tan. \frac{AB - BC}{2}} == \frac{\cot. \frac{AD + DC}{2}}{\tan. \frac{AD - DC}{2}}.$$

Per la qual cosa

$$\frac{\cot. \frac{AB + BC}{2} : \tan. \frac{AB - BC}{2}}{\tan. \frac{AD - DC}{2}} == \frac{\cot. \frac{AD + DC}{2} : \tan. \frac{AD - DC}{2}}{\tan. \frac{AD - DC}{2}}.$$

Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

C O R O L L A R I O I.

99. Essendo

$$\frac{\cot. \frac{AB + BC}{2}}{\tan. \frac{AB - BC}{2}} == \frac{R^2}{\tan. \frac{AB + BC}{2}},$$

$$\frac{\cot. \frac{AD + DC}{2}}{\tan. \frac{AD - DC}{2}} == \frac{R^2}{\tan. \frac{AD + DC}{2}}.$$

Sa-

Saranno

$$\begin{array}{c} \text{cot. } \frac{AB + BC}{2} \\ \hline \text{tang. } \frac{AB - BC}{2} \end{array} = \frac{R^2}{\text{tang. } \frac{AB + BC}{2} \times \text{tan. } \frac{AB - BC}{2}}$$

$$\begin{array}{c} \text{cot. } \frac{AD + DC}{2} \\ \hline \text{tang. } \frac{AD - DC}{2} \end{array} = \frac{R^2}{\text{tan. } \frac{AD + DC}{2} \times \text{tan. } \frac{AD - DC}{2}}$$

Onde

$$\frac{R^2}{\text{tan. } \frac{AB + BC}{2} \times \text{tan. } \frac{AB - BC}{2}} = \frac{R^2}{\text{tan. } \frac{AD + DC}{2} \times \text{tan. } \frac{AD - DC}{2}}$$

e conseguentemente

$$\text{tan. } \frac{AB + BC}{2} \times \text{tan. } \frac{AB - BC}{2} = \text{tan. } \frac{AD + DC}{2} \times \text{tan. } \frac{AD - DC}{2}$$

Per la qual cosa

$$\text{tan. } \frac{AD + DC}{2} : \text{tan. } \frac{AB + BC}{2} = \text{tan. } \frac{AB - BC}{2} : \text{tan. } \frac{AD - DC}{2}$$

CO.

COROLLARIO II.

100. Quindi nel caso della Fig. 14, in cui $\frac{AD + DC}{2}$

dinota la metà della base AC, dati tutt'i lati del triangolo, facendo: come sta la cotangente della metà della somma de' lati AB, BC alla tangente della metà della differenza di essi, così la cotangente della metà della base AC al quarto proporzionale; o pure come sta la tangente della metà della base AC alla tangente della metà della somma de' lati AB, BC, così la tangente della metà della differenza de' medesimi lati al quarto proporzionale; in ambi i

casì col quarto proporzionale si ha la tangente di $\frac{AD - DC}{2}$,

vale a dire della metà della differenza delle due porzioni AD, DC della base AC. Or se coll'ajuto delle Tavole

trigonometriche si determina la grandezza $\frac{AD - DC}{2}$; con

aggiugnerla alla metà della base AC, si ha AD, e con toglierla dall' istessa metà della base, si ha DC; e se ne' triangoli rettangoli ADB, BDC, in cui sono note le ipotenuse AB, BC, conosciuti i lati AD, DC, si determinano tutti gli angoli, si determinano in tal modo tutti gli angoli del triangolo obliquangolo ABC. Ecco come nel caso della Fig. 14, dati tutt'i lati, si possono determinare tutti gli angoli.

COROLLARIO III.

101. Nel caso poi della Fig. 15, in cui $\frac{AD - DC}{2}$

dinota la metà della base AC, dati tutt'i lati del triangolo, facendo: come sta la tangente della metà della differenza de' lati AB, BC alla cotangente della metà della somma di essi, così la tangente della metà della base AC al quarto proporzionale; o pure come sta la tangente della metà

metà della base AC alla tangente della metà della differenza de' lati AB, BC, così la tangente della metà della somma de' medesimi lati al quarto proporzionale; col quarto proporzionale si ha nel primo caso la cotangente, e nel secondo caso la tangente della grandezza $\frac{AD + DC}{2}$.

Or se coll'ajuto delle Tavole trigonometriche si determina tale grandezza $\frac{AD + DC}{2}$; con aggiugnervi la metà della

base AC, si ha AD, e con toglierne l'istessa metà della base AC, si ha DC; e se ne' triangoli rettangoli ADB, BDC, in cui sono note le ipotenuse AB, BC, conosciuti i lati AD, DC, si determinano tutti gli angoli, si determinano in tal modo tutti gli angoli del triangolo obbliquo ABC. Ed ecco come nel caso della Fig. 15, dati tutt'i lati, si possono determinare anche tutti gli angoli.

A V V E R T I M E N T O.

102. Ancorchè secondo i modi già insegnati si possano determinare i tre angoli di qualunque triangolo obbliquo, qualora sono dati tutt'i lati: nondimeno ci piace di soggiugnerne un altro, che riesce più spedito, e più comodo nella pratica, menandoci alla determinazione di qualunque degli tre angoli coll'ajuto d'una sola proporzione, senza bisogno d'altro. Perciò soggiugniamo il seguente

T E O R. XIX.

Fig. 14, 103. In ogni triangolo obbliquo ABC il prodotto de' seni di due lati sta al prodotto de' seni delle differenze de' medesimi lati dalla metà della somma di tutti e tre, come il quadrato del seno massimo al quadrato del seno della metà dell'angolo compreso dagl'istessi due lati.

D I M O S T R A Z I O N E.

Si metta il seno massimo == R. Essendo pel § 39 della Trig. piana

$$\text{sen. } \frac{1}{2} A == \sqrt{\frac{1}{2} R (R - \text{cos. } A)};$$

e perciò

$$2 (\text{sen. } \frac{1}{2} A)^2 == R (R - \text{cos. } A).$$

Ed essendo pel § 88

$$\text{cos. } A == \frac{R^2 \times \text{cos. } BC - R \times \text{cos. } AB \times \text{cos. } AC}{\text{sen. } AB \times \text{sen. } AC}.$$

Sarà

$$2 (\text{sen. } \frac{1}{2} A)^2 ==$$

$$R \left(R - \left(\frac{R^2 \times \text{cos. } BC - R \times \text{cos. } AB \times \text{cos. } AC}{\text{sen. } AB \times \text{sen. } AC} \right) \right)$$

$$== R \left(\frac{R (\text{cos. } AB \times \text{cos. } AC + \text{sen. } AB \times \text{sen. } AC) - R^2 \times \text{cos. } BC}{\text{sen. } AB \times \text{sen. } AC} \right).$$

Ma pel § 66

$$\frac{\text{cos. } AB \times \text{cos. } AC + \text{sen. } AB \times \text{sen. } AC}{R} == \text{cos. } \frac{1}{2} (AC - AB),$$

e conseguentemente

$$R (\text{cos. } AB \times \text{cos. } AC + \text{sen. } AB \times \text{sen. } AC) == R^2 \times \text{cos. } \frac{1}{2} (AC - AB).$$

I 2

Sicchè

Sicchè

$$2 \left(\text{sen. } \frac{1}{2} A \right)^2 == \frac{R^2 \left(\text{cos. } \frac{1}{2} (AC - AB) - \text{cos. } BC \right)}{\text{sen. } AB \times \text{sen. } AC},$$

e

$$\left(\text{sen. } \frac{1}{2} A \right)^2 == R^2 \left(\frac{\frac{1}{2} R \left(\text{cos. } \frac{1}{2} (AC - AB) - \text{cos. } BC \right)}{\text{sen. } AB \times \text{sen. } AC} \right).$$

E' in oltre pel § 67

$$\frac{1}{2} R \left(\text{cos. } (AC - AB) - \text{cos. } BC \right) == \text{sen. } \frac{AC + BC - AB}{2} \times \text{sen. } \frac{BC + AB - AC}{2}.$$

Dunque

$$\left(\text{sen. } \frac{1}{2} A \right)^2 == R^2 \left[\frac{\text{sen. } \frac{AC + BC - AB}{2} \times \text{sen. } \frac{BC + AB - AC}{2}}{\text{sen. } AB \times \text{sen. } AC} \right].$$

Posta finalmente la somma de' lati AB, BC, CA , cioè $AB + BC + CA == S$; farà

$$\frac{1}{2} S == \frac{AB + BC + CA}{2},$$

e

$$\frac{1}{2} S - AB == \frac{AC + BC - AB}{2}$$

$$\frac{1}{2} S - AC == \frac{AB + BC - AC}{2},$$

Onde

$$\left(\text{sen. } \frac{1}{2} A \right)^2 ==$$

$$R^2 \left(\frac{\text{sen. } \left(\frac{1}{2} S - AB \right) \times \text{sen. } \left(\frac{1}{2} S - AC \right)}{\text{sen. } AB \times \text{sen. } AC} \right).$$

Per la qual cosa

$$\text{sen. } AB \times \text{sen. } AC : \text{sen. } \left(\frac{1}{2} S - AB \right) \times \text{sen. } \left(\frac{1}{2} S - AC \right) == R^2 : \left(\text{sen. } \frac{1}{2} A \right)^2.$$

Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

A V V E R T I M E N T O I.

104. Si noti che, facendo uso de' seni in numeri logaritmici, se si sommano insieme $\text{Log. sen. } \left(\frac{1}{2} S - AB \right)$, $\text{Log. sen. } \left(\frac{1}{2} S - AC \right)$, e $2 \text{ Log. } R$, e da tale somma se ne sottrae l'altra di $\text{Log. sen. } AB$, e $\text{Log. sen. } AC$, il residuo dà $\text{Log. } \left(\text{sen. } \frac{1}{2} A \right)^2$, e la metà dà $\text{Log. sen. } \frac{1}{2} A$. Or se si cerca nelle Tavole trigonometriche il valore dell'angolo corrispondente a $\text{Log. sen. } \frac{1}{2} A$, e di tale valore se ne prende il doppio; si ha in tal modo il valore dell'angolo in A . Coll'istessa facilità si possono determinare i rimanenti angoli del triangolo ABC , qualora sono dati tutt'i lati.

105. Esposti già tutt'i principj teoretici, che ci menano a determinare tutti gli angoli di qualunque triangolo obbliquangolo, qualora sono dati tutt'i lati; resta ora che s' esponga il principio teoretico, che ci deve condurre a determinare di qualunque triangolo obbliquangolo tutt'i lati, qualora sono dati tutti gli angoli. Perciò soggiungiamo il seguente

T E O R. XX.

Fig. 14, e 15. 106. Sia ABC qualunque triangolo sferico obbliquangolo, e BD sia l'arco di cerchio massimo menato dal punto B perpendicolare ad AC. Dico essere la tangente della metà della somma de' due angoli ABD, CBD alla tangente della metà della differenza di essi, come la cotangente della metà della somma de' due angoli BAC, BCA alla tangente della metà della differenza de' medesimi.

D I M O S T R A Z I O N E.

Essendo pel § 86

$$\text{sen. ABD} : \text{sen. CBD} == \text{cos. BAD} : \text{cos. BCD}.$$

Sarà

$$\text{sen. ABD} + \text{sen. CBD} : \text{sen. ABD} - \text{sen. CBD} == \text{cos. BAD} + \text{cos. BCD} : \text{cos. BAD} - \text{cos. BCD}.$$

Onde

$$\frac{\text{sen. ABD} + \text{sen. CBD}}{\text{sen. ABD} - \text{sen. CBD}} == \frac{\text{cos. BAD} + \text{cos. BCD}}{\text{cos. BAD} - \text{cos. BCD}}.$$

Ma

Ma pel § 70

$$\frac{\text{sen. ABD} + \text{sen. CBD}}{\text{sen. ABD} - \text{sen. CBD}} == \frac{\text{tan. } \frac{\text{ABD} + \text{CBD}}{2}}{\text{tan. } \frac{\text{ABD} - \text{CBD}}{2}},$$

e pel § 68

$$\frac{\text{cos. BAD} + \text{cos. BCD}}{\text{cos. BAD} - \text{cos. BCD}} == \frac{\text{cotan. } \frac{\text{BCD} + \text{BAD}}{2}}{\text{tang. } \frac{\text{BCD} - \text{BAD}}{2}}.$$

Sicchè

$$\frac{\text{tang. } \frac{\text{ABD} + \text{CBD}}{2}}{\text{tang. } \frac{\text{ABD} - \text{CBD}}{2}} == \frac{\text{cotan. } \frac{\text{BCD} + \text{BAD}}{2}}{\text{tang. } \frac{\text{BCD} - \text{BAD}}{2}}.$$

E perciò

$$\frac{\text{tang. } \frac{\text{ABD} + \text{CBD}}{2}}{\text{cotan. } \frac{\text{BCD} + \text{BAD}}{2}} : \frac{\text{tang. } \frac{\text{ABD} - \text{CBD}}{2}}{\text{tang. } \frac{\text{BCD} - \text{BAD}}{2}} ==$$

Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

CO.

107. Quindi nel caso della Fig. 14, in cui $\frac{ABD + CBD}{2}$

dinota la metà dell'angolo ABC, dati tutti gli angoli del triangolo, facendo: come sta la cotangente della metà della somma degli angoli BCD, BAD alla tangente della metà della differenza di essi, così la tangente della metà dell'angolo ABC al quarto proporzionale; col quarto proporzionale si ha la tangente di $\frac{ABD - CBD}{2}$, o sia della metà

della differenza degli angoli ABD, CBD. Or se coll'ajuto delle Tavole trigonometriche si determina la grandezza $\frac{ABD - CBD}{2}$

; con aggiungerla alla metà dell'angolo ABC, si ha l'angolo maggiore ABD, e con toglierla dall'istessa metà dell'angolo ABC, si ha l'angolo minore CBD; e se ne' triangoli rettangoli BDA, BDC, in cui sono noti gli angoli obliqui BAD, BCD, conosciuti gli altri angoli obliqui ABD, CBD, si determinano le ipotenuse AB, CB, e i lati AD, DC, si determinano in tal modo tutt'i lati del triangolo obliquangolo ABC. Ecco come nel caso della Fig. 14, dati tutti gli angoli, si possono determinare tutt'i lati.

C O R O L L A R I O II.

108. Nel caso poi della Fig. 15, in cui dinota $\frac{ABD - CBD}{2}$

la metà dell'angolo ABC, facendo: come sta la tangente della metà della differenza degli angoli BAD, BCD alla cotangente della metà della somma di essi, così la tangente della metà dell'angolo ABC al quarto proporzionale; con tale quarto proporzionale si ha la tangente

gente di $\frac{ABD + CBD}{2}$. Or se coll'ajuto delle Tavole trigonometriche si determina l'angolo $\frac{ABD + CBD}{2}$; con

aggiugnervi la metà dell'angolo ABC, si ha l'angolo ABD, e con toglierne l'istessa metà dell'angolo ABC, si ha l'angolo CBD; e se ne' triangoli rettangoli ADB, CDB, ne' quali sono noti gli angoli obliqui BAD, BCD, conosciuti gli altri angoli obliqui ABD, CBD, si determinano le ipotenuse AB, CB, e i lati AD, CD, si determinano in tal modo tutt'i lati del triangolo obliquangolo ABC. Ed ecco come anche nel caso della Fig. 15, dati tutti gli angoli, si possono determinare tutt'i lati.

A V V E R T I M E N T O.

109. Sebbene del modo già esposto si possono determinare i tre lati di qualunque triangolo obliquangolo, qualora sono dati tutti gli angoli: pure ci piace di aggiungerne un altro, che riesce nella pratica più spedito, e conseguentemente più comodo, menandoci alla determinazione di qualunque de' tre lati coll'ajuto d'una sola proporzione, senza bisogno d'altro. Per esporre intanto tal modo, conviene che premettiamo il seguente

L E M M A.

110. Sia ABC qualunque triangolo sferico, ed LMN Fig. 16 sia un altro triangolo sferico descritto sulla superficie dell'istessa sfera in modo, che i cerchi, a quali appartengono i lati LM, MN, NL, abbiano per poli rispettivamente i punti A, B, C. Dico 1° che i lati del triangolo LMN sono i supplimenti alle mezze periferie degli archi, che misurano gli angoli corrispondenti del triangolo ABC; e 2° che le misure degli angoli del triangolo LMN sono i supplimenti alle mezze periferie de' lati corrispondenti del medesimo triangolo ABC.

K

DI.

D I M O S T R A Z I O N E .

I. Passando il cerchio, a cui appartiene AB , per gli poli A , e B di quelli, a' quali appartengono LM , MN ; passeranno i cerchi, a' quali appartengono LM , MN , pel polo di quello, a cui appartiene AB (§ 17). Onde M è polo di sì fatto cerchio. Similmente si dimostra essere L , e N poli de' cerchi, a' quali appartengono AC , CB . Sicchè LI , LF , MG , MD , NE , NH sono tutti archi di quadranti (§ 21). E perciò $NE + MD$ uguaglia una mezza periferia, e conseguentemente NM è supplimento di DE alla mezza periferia. Ma DE è misura dell'angolo in B (§ 29). Sicchè NM è supplimento alla mezza periferia dell'arco, che misura il corrispondente angolo sferico ABC . Dell'istesso modo si dimostra essere ML , LN supplimenti alle mezze periferie degli archi FG , HI , che misurano i corrispondenti angoli sferici BAC , BCA .

II. Essendo IC , AF archi di quadranti; sarà IF supplimento di AC alla mezza periferia. Ma IF misura l'angolo in L (§ 29). Sicchè la misura dell'angolo sferico in L è il supplimento alla mezza periferia del lato AC . Dell'istesso modo si dimostra essere le misure degli angoli sferici in M , e N i supplimenti degli corrispondenti lati AB , BC alle mezze periferie. Ch'è quanto bisognava dimostrare.

C O R O L L A R I O .

III. Si mettano la somma de' lati LM , MN , NL , o sia $LM + MN + NL = S$, e la somma degli angoli in A , B , C , ovvero $A + B + C = S''$. Essendo

$$LM + A \quad 180^\circ$$

$$MN + B \quad \text{di} \quad 180^\circ$$

$$NL + C \quad 180^\circ,$$

farà

farà

$$\frac{1}{2} S + \frac{1}{2} S'' \quad \text{di} \quad 3 \times 90^\circ.$$

Posti in oltre qualunque de' lati del triangolo $LMN = P$, e l'angolo del triangolo ABC corrispondente all'istesso lato $= Q$; farà

$$P + Q \quad \text{di} \quad 2 \times 90^\circ.$$

Onde farà

$$\frac{1}{2} S - P + \frac{1}{2} S'' - Q \quad \text{di} \quad 90^\circ.$$

E perciò i gradi, che dinota $\frac{1}{2} S - P$, e quelli, che dinota $\frac{1}{2} S'' - Q$, formano insieme i gradi dell'arco d'un quadrante. Ma $\frac{1}{2} S - P$ è la differenza di qualunque lato del triangolo LMN dalla metà della somma di tutti e tre; ed $\frac{1}{2} S'' - Q$ è la differenza dell'angolo del triangolo ABC , corrispondente all'istesso lato del triangolo LMN , dalla metà della somma di tutti e tre gli angoli del medesimo triangolo ABC . Sicchè i gradi della prima differenza, e quelli della seconda insieme uguagliano i gradi dell'arco d'un quadrante.

T E O R . XXI.

III. In ogni triangolo sferico obliquangolo ABC il prodotto de' seni di due angoli sta al prodotto de' coseni delle differenze de' medesimi angoli dalla metà della somma di tutti e tre, come il quadrato del seno massimo al quadrato del coseno della metà del lato compreso dagli stessi due angoli.

D I M O S T R A Z I O N E .

S'intenda costruito il triangolo sferico LMN del modo supposto nel *lem. prec.*; e si mettano il seno massimo $= R$, la somma de' lati LM , MN , NL , o sia $LM + MN + NL = S$, e la somma degli angoli in A , B , C , o sia $A + B + C = S'$. Sarà pel § 103

K 2

sen.

$$\text{sen. } LM \times \text{sen. } MN : \text{sen. } \left(\frac{1}{2} S - LM \right) \times \text{sen. } \left(\frac{1}{2} S - MN \right) == R^2 : \left(\text{sen. } \frac{1}{2} M \right)^2.$$

Or essendo gli archi LM , MN supplimenti alle mezze periferie di quelli, che misurano gli angoli in A , e B (*lem. prec.*); faranno

$$\text{sen. } LM == \text{sen. } A,$$

$$\text{sen. } MN == \text{sen. } B.$$

Essendo in oltre 90 i gradi di $\frac{1}{2} S - LM$ una con quei di $\frac{1}{2} S' - A$, e 90 pure i gradi di $\frac{1}{2} S - MN$ una con quei di $\frac{1}{2} S' - B$ pel § *prec.*; faranno

$$\text{sen. } \left(\frac{1}{2} S - LM \right) == \text{cos. } \left(\frac{1}{2} S' - A \right),$$

$$\text{sen. } \left(\frac{1}{2} S - MN \right) == \text{cos. } \left(\frac{1}{2} S' - B \right).$$

E finalmente essendo $\frac{1}{2} AB$ della metà dell'arco, che misura l'angolo in M , supplimento all'arco di quadrante; farà

$$\text{sen. } \frac{1}{2} M == \text{cos. } \frac{1}{2} AB.$$

Quindi farà

$$\text{sen. } A \times \text{sen. } B : \text{cos. } \left(\frac{1}{2} S' - A \right) \times \text{cos. } \left(\frac{1}{2} S' - B \right) == R^2 : \left(\text{cos. } \frac{1}{2} AB \right)^2.$$

Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

A V V E R T I M E N T O I.

113. Si noti che, facendo uso de' seni in numeri logaritmici, se si sommano insieme $\text{Log. cos. } \left(\frac{1}{2} S' - A \right)$, $\text{Log. cos. } \left(\frac{1}{2} S' - B \right)$, e $2 \text{ Log. } R$, e da tale somma se ne sottrae l'altra di $\text{Log. } A$, e $\text{Log. } B$; il residuo dà $\text{Log. } \left(\text{cos. } \frac{1}{2} AB \right)^2$, e la metà dà $\text{Log. cos. } \frac{1}{2} AB$. Or se si cerca nelle Tavole trigonometriche il valore dell'arco corrispondente a $\text{Log. cos. } \frac{1}{2} AB$; e di tale valore se ne prende il doppio; si ha

si ha in tal modo il valore del lato AB . Coll'istessa facilità si possono determinare i rimanenti lati del triangolo ABC , qualora sono dati tutti gli angoli.

A V V E R T I M E N T O II.

114. Ecco esposto quanto bisogna per potere determinare in tutt'i casi possibili le parti ignote di qualsiasi triangolo sferico, in conseguenza de' dati necessarj. Resta ora che si proceda alla pratica di sì fatte determinazioni. Perciò soggiugniamo il capo seguente.

C A P. V.

Del probl.: *date tre parti d'un triangolo sferico, determinare ciascuna delle altre, sciolto col calcolo aritmetico secondo tutt'i casi possibili.*

P R O B L. I.

115. *Date due parti d'un triangolo sferico rettangolo; determinare col calcolo aritmetico ciascuna delle altre.*

S O L U Z I O N E.

Si metta il seno massimo == R .

I. Combinazione di dati.

Fig. 13. Sieno dati l'ipotenusa BC, e'l lato AB.

C A S O I.

Per determinare l'angolo ACB.

Si faccia $\text{Log. sen. BC} : \text{Log. R} == \text{Log. sen. AB} : \text{Log. sen. ACB}$ (§ 71); e si determini l'angolo ACB.

E S E M P I O.

Sieno $BC == 63^\circ . 18' . 23''$, e $AB == 23^\circ . 12' . 43''$.

$$\text{Log. sen. AB} == 9 . 5956433$$

$$\text{Log. R} == 10 . 0000000 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 19 . 5956433$$

$$\text{Log. sen. BC} == 9 . 9510563 \text{ sott.}$$

$$\text{Log. sen. ACB} == 9 . 6445870.$$

Sicchè

$$ACB == 26^\circ . 10' . 38''.$$

CA-

C A S O II.

Per determinare l'angolo ABC.

Si faccia $\text{Log. tan. BC} : \text{Log. R} == \text{Log. tan. AB} : \text{Log. cos. ABC}$ (§ 71); e si determini l'angolo ABC.

E S E M P I O.

Sieno pure $BC == 63^\circ . 18' . 23''$, e $AB == 23^\circ . 12' . 43''$.

$$\text{Log. tan. AB} == 9 . 6323026$$

$$\text{Log. R} == 10 . 0000000 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 19 . 6323026$$

$$\text{Log. tan. BC} == 10 . 2986029 \text{ sott.}$$

$$\text{Log. cos. ABC} == 9 . 3336997.$$

Dunque

$$ABC == 77^\circ . 32' . 53''.$$

C A S O III.

Per determinare AC.

Si faccia $\text{Log. cos. AB} : \text{Log. cos. BC} == \text{Log. R} : \text{Log. cos. AC}$ (77); e si determini il lato AC.

ESEM-

T R A T T A T O
E S E M P I O.

Sieno anche $BC == 63^\circ . 18' . 23''$, e $AB == 23^\circ . 12' . 43''$.

$$\text{Log. cos. } BC == 9 . 6524584$$

$$\text{Log. } R == 10 . 0000000 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 19 . 6524584$$

$$\text{Log. cos. } AB == 9 . 9633406 \text{ fott.}$$

$$\text{Log. cos. } AC == 9 . 6891178.$$

Sicchè

$$AC == 60^\circ . 44' . 22''.$$

II. Combinazione di dati.

Sieno dati l'ipotenusa BC , e l'angolo obliquo ACB .

C A S O IV.

Per determinare il lato AB .

Si faccia $\text{Log. } R : \text{Log. sen. } BC == \text{Log. sen. } ACB : \text{Log. sen. } AB$ (§ 71); e si determini AB .

E S E M P I O.

Sieno $BC == 63^\circ . 18' . 23''$, e $ACB == 26^\circ . 10' . 38''$.

Log.

DELLA TRIG. SFERICA.

$$\text{Log. sen. } BC == 9 . 9510563$$

$$\text{Log. sen. } ACB == 9 . 6445853 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 19 . 5956416$$

$$\text{Log. } R == 10 . 0000000 \text{ fott.}$$

$$\text{Log. sen. } AB == 9 . 5956416.$$

Sicchè

$$AB == 23^\circ . 12' . 42''.$$

C A S O V.

Per determinare il lato AC .

Si faccia $\text{Log. } R : \text{Log. tang. } BC == \text{Log. cos. } ACB : \text{Log. tang. } AC$ (§ 71); e si determini AC .

E S E M P I O.

Sieno pure $BC == 63^\circ . 18' . 23''$, e $ACB == 26^\circ . 10' . 38''$.

$$\text{Log. tang. } BC == 10 . 2986029$$

$$\text{Log. cos. } ACB == 9 . 9530024 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 20 . 2516053$$

$$\text{Log. } R == 10 . 0000000 \text{ fott.}$$

$$\text{Log. tang. } AC == 10 . 2516053.$$

L

Sic-

Sicchè

$$AC == 60^{\circ} . 44' . 22''.$$

C A S O VI.

Per determinare l'angolo ABC.

Si faccia $\text{Log. } R : \text{Log. tang. } ACB == \text{Log. cof. } BC :$
 $\text{Log. cotang. } ABC$ (§ 77); e si determini l'angolo ABC.

E S E M P I O.

Sieno anche $BC == 63^{\circ} . 18' . 23''$, e $ACB == 26^{\circ} . 10' . 38''$.

$$\text{Log. tang. } ACB == 9 . 6915830$$

$$\text{Log. cof. } BC == 9 . 6524584 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 19 . 3440414$$

$$\text{Log. } R == 10 . 0000000 \text{ fott.}$$

$$\text{Log. cotang. } ABC == 9 . 3440414.$$

Sicchè

$$ABC == 77^{\circ} . 32' . 52''.$$

III.

III^a Combinazione di dati.

Sieno dati l'angolo ACB, e'l lato opposto AB.

C A S O VII.

Per determinare l'ipotenusa BC.

Si faccia $\text{Log. sen. } ACB : \text{Log. sen. } AB == \text{Log. } R :$
 $\text{Log. sen. } BC$ (§ 71); e si determini BC.

E S E M P I O.

Sieno $ACB == 26^{\circ} . 10' . 38''$, e $AB == 23^{\circ} . 12' . 43''$.

$$\text{Log. sen. } AB == 9 . 5956433$$

$$\text{Log. } R == 10 . 0000000 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 19 . 5956433$$

$$\text{Log. sen. } ACB == 9 . 6445853 \text{ fott.}$$

$$\text{Log. sen. } BC == 9 . 9510580.$$

Sicchè

$$BC == \begin{cases} 63^{\circ} . 18' . 24'' \\ 116 . 41 . 36. \end{cases}$$

L 2

CA.

Per determinare AC.

Si faccia $\text{Log. tang. ACB} : \text{Log. R} == \text{Log. tang. AB} : \text{Log. sen. AC}$ (§ 71); e si determini AC.

E S E M P I O.

Sieno pure $\text{ACB} == 26^\circ . 10' . 38''$, e $\text{AB} == 23^\circ . 12' . 43''$.

$$\text{Log. tan. AB} == 9 . 6323026$$

$$\text{Log. R} == 10 . 0000000 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 19 . 6323026$$

$$\text{Log. tan. ACB} == 9 . 6915830 \text{ fott.}$$

$$\text{Log. sen. AC} == 9 . 9407196.$$

Sicchè

$$\text{AC} == \begin{cases} 60^\circ . 44' . 22'' \\ 119 . 15 . 38. \end{cases}$$

C A S O I X.

Per determinare ABC.

Si faccia $\text{Log. cof. AB} : \text{Log. cof. ACB} == \text{Log. R} : \text{Log. sen. ABC}$ (§ 77); e si determini l'angolo ABC.

ESEM-

E S E M P I O. I

Sieno anche $\text{ACB} == 26^\circ . 10' . 38''$, e $\text{AB} == 23^\circ . 12' . 43''$.

$$\text{Log. cof. ACB} == 9 . 9530024$$

$$\text{Log. R} == 10 . 0000000 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 19 . 9530024$$

$$\text{Log. cof. AB} == 9 . 9633406 \text{ fott.}$$

$$\text{Log. sen. ABC} == 9 . 9896618.$$

Sicchè

$$\text{ABC} == \begin{cases} 77^\circ . 32' . 52'' \\ 12 . 27 . 8. \end{cases}$$

IV^a Combinazione di dati.

Sieno dati l'angolo ACB, e'l lato adiacente AC.

C A S O X.

Per determinare l'ipotenusa BG.

Si faccia $\text{Log. cof. ACB} : \text{Log. tan. AG} == \text{Log. R} : \text{Log. tan. BG}$ (§ 71); e si determini BG.

ESEM.

Sieno l'angolo $ACB == 26^\circ . 10' . 38''$, e'l lato $AC == 60^\circ . 44' . 22''$.

$$\text{Log. tan. } AC == 10 . 2516034$$

$$\text{Log. } R == 10 . 0000000 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 20 . 2516034$$

$$\text{Log. cof. } ACB == 9 . 9530024 \text{ fott.}$$

$$\text{Log. tan. } BC == 10 . 2986010 .$$

Sicchè

$$BC == 63^\circ . 18' . 23'' .$$

C A S O XI.

Per determinare il lato AB.

Si faccia $\text{Log. } R : \text{Log. tan. } ACB == \text{Log. sen. } AC :$
 $\text{Log. tan. } AB (\S 71)$; e si determini AB.

E S E M P I O.

Sieno pure $ACB == 26^\circ . 10' . 38''$, e $AC == 60^\circ . 44' . 22''$.

$$\text{Log. tan. } ACB == 9 . 6915830$$

Log.



$$\text{Log. sen. } AC == 9 . 9407181 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 19 . 6323011$$

$$\text{Log. } R == 10 . 0000000 \text{ fott.}$$

$$\text{Log. tan. } AB == 9 . 6323011 .$$

Sicchè

$$AB == 23^\circ . 12' . 42'' .$$

C A S O XII.

Per determinare l'angolo ABC.

Si faccia $\text{Log. } R : \text{Log. sen. } ACB == \text{Log. cof. } AC :$
 $\text{Log. cof. } ABC (\S 77)$; e si determini l'angolo ABC.

E S E M P I O.

Sieno anche $ACB == 26^\circ . 10' . 38''$, e $AC == 60^\circ . 44' . 22''$.

$$\text{Log. sen. } ACB == 9 . 6445853$$

$$\text{Log. cof. } AC == 9 . 6891151 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 19 . 3337004$$

$$\text{Log. } R == 10 . 0000000 \text{ fott.}$$

$$\text{Log. cof. } ABC == 9 . 3337004 .$$

Du .

Dunque

$$A \cdot B \cdot C == 77^{\circ} . 32' . 52''.$$

V.^a Combinazione di dati.

Sieno dati i due lati AB, AC.

C A S O XIII.

Per determinare l'ipotenusa BC.

Si faccia $\text{Log. } R : \text{Log. } \cos : AB == \text{Log. } \cos : AC : \text{Log. } \cos : BC$ (§ 77); e si determini BC.

E S E M P I O.

Sieno $AB == 23^{\circ} . 12' . 43''$, e $AC == 60^{\circ} . 44' . 22''$.

$$\text{Log. } \cos : AB == 9 . 9633406$$

$$\text{Log. } \cos : AC == 9 . 6891151 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 19 . 6524557$$

$$\text{Log. } R == 10 . 0000000 \text{ fott.}$$

$$\text{Log. } \cos : BC == 9 . 6524557.$$

Sicchè

$$BC == 63^{\circ} . 18' . 24''.$$

C A S O XIV.

Per determinare uno degli angoli obliqui, cioè ACB.

Si faccia $\text{Log. } \sin : AC : \text{Log. } \tan : AB == \text{Log. } R : \text{Log. } \tan : AGB$ (§ 71); e si determini l'angolo ACB.

E S E M P I O.

Sieno pure $AB == 23^{\circ} . 12' . 43''$, e $AC == 60^{\circ} . 44' . 22''$.

$$\text{Log. } \tan : AB == 9 . 6323026$$

$$\text{Log. } R == 10 . 0000000 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 19 . 6323026$$

$$\text{Log. } \sin : AC == 9 . 9407181 \text{ fott.}$$

$$\text{Log. } \tan : ACB == 9 . 6915845.$$

Sicchè

$$ACB == 16^{\circ} . 10' . 38''.$$

VI^a Combinazione di dati.

Sieno dati i due angoli obliqui ACB, ABC.

C A S O XV.

Per determinare l'ipotenusa BC.

Si faccia $\text{Log. tan. ACB} : \text{Log. R} == \text{Log. cotan. ABC} : \text{Log. cof. BC} (\text{ } 77 \text{ })$; e si determini BC.

E S E M P I O.

Sieno ACB == $26^{\circ} . 10' . 38''$, e ABC == $77^{\circ} . 32' . 52''$.

$$\text{Log. cotan. ACB} == 9 . 3440382$$

$$\text{Log. R} == 10 . 0000000 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 19 . 3440382$$

$$\text{Log. tan. ACB} == 9 . 6915830 \text{ sott.}$$

$$\text{Log. cof. BC} == 9 . 6524552.$$

Dunque

$$\text{BC} == 63^{\circ} . 18' . 24''.$$

C A S O XVI.

Per determinare uno de' lati, cioè AB.

Si faccia $\text{Log. sen. ABC} : \text{Log. R} == \text{Log. cof. ACB} : \text{Log. cof. AB} (\text{ } 77 \text{ })$; e si determini il lato AB.

E S E M P I O.

Sieno pure ACB == $26^{\circ} . 10' . 38''$, e ABC == $77^{\circ} . 32' . 52''$.

$$\text{Log. cof. ACB} == 9 . 9530024$$

$$\text{Log. R} == 10 . 0000000 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 19 . 9530024$$

$$\text{Log. sen. ABC} == 9 . 9896616 \text{ sott.}$$

$$\text{Log. cof. AB} == 9 . 9633408.$$

Sicchè

$$\text{AB} == 23^{\circ} . 12' . 43''.$$

P R O B L. II.

116. Date tre parti di qualunque triangolo sferico obliquangolo, determinare col calcolo aritmetico ciascuna delle altre.

S O L U Z I O N E.

Si metta il seno massimo == R.
M 2

1^a Combinazione di dati.Fig. 14,
e 15.

Sieno dati i lati AB, BC, e l'angolo BCA.

C A S O I.

Per determinare l'angolo BAC.

Si faccia $\text{Log. sen. AB} : \text{Log. sen. BC} == \text{Log. sen. BCA} : \text{Log. sen. BAC}$ (§ 84); e si determini l'angolo BAC.

E S E M P I O.

Fig. 14.

Sieno $AB == 67^\circ . 23' . 18''$, $BC == 38^\circ . 15' . 52''$,
e $BCA == 52^\circ . 10' . 13''$.

$$\text{Log. sen. BC} == 9.7918954$$

$$\text{Log. sen. BCA} == 9.8975374 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 19.6894328$$

$$\text{Log. sen. AB} == 9.9652637 \text{ sott.}$$

$$\text{Log. sen. BAC} == 9.7241691.$$

Sicchè

$$BAC == 31^\circ . 59' . 47''.$$

C A S O II.

Per determinare il lato AC.

Fig. 14,
e 15.

1. Nel triangolo rettangolo BDC, nota l'ipotenusa BC, e noto l'angolo obliquo BCD, facendo $\text{Log. R} : \text{Log. tan. BC} == \text{Log. cof. BCD} : \text{Log. tan. DC}$ (§ 71), si determini CD.

2. Si faccia $\text{Log. cof. BC} : \text{Log. cof. AB} == \text{Log. cof. CD} : \text{Log. cof. AD}$ (§ 86); e si determini AD.

S' avrà nel caso della Fig. 14 $AC == AD + DC$, e nel caso della Fig. 15 $AC == AD - DC$.

E S E M P I O.

Sieno pure $AB == 67^\circ . 23' . 18''$, $BC == 38^\circ . 15' . 52''$, e $BCA == 52^\circ . 10' . 13''$. Fig. 14.

$$\text{Log. tan. BC} == 9.8969367$$

$$\text{Log. cof. BCD} == 9.7876849 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} == 19.6846216$$

$$\text{Log. R} == 10.0000000 \text{ sott.}$$

$$\text{Log. tan. DC} == 9.6846216.$$

Sicchè

$$DC == 25^\circ . 48' . 55''.$$

In