



CORSO
DI MATEMATICA

DEL SIGNOR

ABATE BOSSUT

TRADOTTO DAL FRANCESE

ed arricchito di aggiunte

DAL P. ANDREA MOZZONI.

QUARTA EDIZIONE VENETA

Emendata da moltissimi errori.

Preceduta da un nuovo Trattato Elementare

DI ARITMETICA

VOLUME SECONDO.



DONO EREDI DI
NICOLA E NICOLETTA GATTINI

No. 110 di Michele Sattini

VENEZIA

PRESSO SIMONE OGCHI

M. DCCC. VIII.

GATTINI
7
35/2

A V V I S O
D E L L' E D I T O R E



Nel riprodurre questo secondo Tomo del *Corso di Matematica* del sig. Abbate Bossut, io mi sono quasi interamente attenuto all'edizione seconda Italiana che comparve a Pavia nel 1790: tutta la differenza sta in poche e brevi note aggiunte di nuovo agli Elementi di Geometria, e in alcuni cenni sull'Analisi Indeterminata, co' quali si chiude il volume:

Le prime son parse necessarie pel più compiuto sviluppo delle nozioni o de' ragionamenti men rigorosi, di cui si vale talvolta il Ch. Autore, e che di leggieri destar potrebbero nell'animo de' Principianti qualche ingiusto dubbio sulla esatta verità delle Dottrine Geometriche. Co'secondi è stato mio intendimento l'iniziare i Lettori allo studio di una parte dell'Algebra, intorno a cui han faticato a gara i più illustri Matematici del secolo, che

non è d'altronde senza molte utili applicazioni, e della quale non s'eran neppure indicati i principj nel primo Tomo di questo Compendio.

TRATTATO

ELEMENTARE

DI GEOMETRIA.



Definizioni e Nozioni preliminari.

1. **L**A GEOMETRIA è una scienza che ha per oggetto la misura dell'estensione.

2. Si distinguono tre specie d'estensione: la *linea*, la *superficie* ed il *solido* o il *corpo*. La *linea* è un'estensione soltanto in lunghezza: la *superficie* è un'estensione in lunghezza e larghezza: il *solido* è un'estensione in lunghezza, larghezza, e profondità.

L'estremità d'una *linea* si chiama *punto*: si può considerare il *punto* come una *linea*, la cui lunghezza è diventata zero; similmente si può considerare la *linea* come una *superficie*, la cui larghezza è svanita: e la *superficie* come un *solido*, la cui profondità è svanita.

3. La *linea* e la *superficie* non possono esistere per se stesse ed indipendentemente dal *solido*: esse vi sono sempre annesse. La *superficie* è come la coperta esteriore o una porzione della coperta esteriore del *solido*: e la *linea* è come l'estremità o una porzione dell'estremità della *superficie*. Ma è sempre lecito, ed è qualche volta necessario di separare, col pensiero, la *linea* e la *superficie* dal *solido*, e d'immaginare che la *linea* o la

superficie esista sola. Di fatti, se voglio, per esempio, conoscere la distanza da Parigi a Lione, egli è chiaro che devo considerare semplicemente la lunghezza del cammino che conduce da una città all'altra, senza pensare alla larghezza di questo cammino nè alla profondità del terreno, sopra il quale è stabilito. Se voglio misurare l'estensione del pavimento della mia camera, devo considerarne la lunghezza e la larghezza, e non mi devo punto occupare intorno al solido coperto da questo pavimento. Ma se mi si domanda la capacità d'un vaso, per sapere quanti boccali d'acqua può contenere; bisogna che io abbia riguardo nel medesimo tempo alle tre dimensioni del vaso, lunghezza, larghezza e profondità.

4. Vi sono in generale due sorti di linee: la linea retta e la linea curva.

La linea retta è quella AB (Fig. 1.) che va da un punto A ad un altro B , senza piegare da alcuna parte: ella può essere considerata come prodotta dal moto del punto A che cammina da A verso B , seguendo sempre la medesima direzione.

Una linea ACB , composta di due linee rette AC , CB , che formano un angolo in C , si chiama linea spezzata.

La linea ADB , che devia a ciascun passo dalla direzione rettilinea, si chiama linea curva, o semplicemente una curva: ella può in certo senso essere considerata come l'aggregato d'un'infinità di linee spezzate e infinitamente piccole.

5. La linea retta esprime la distanza o il più breve cammino da un punto A ad un altro B . Questo cammino più breve è necessariamente unico; di modo che dal punto A al punto B non si può condurre che una sola linea retta, o volendo-

sene condurre molte, esse si confonderanno tutte in una sola e medesima linea. Ma dal punto A al punto B si può condurre un'infinità di linee spezzate ACB , o di curve ADB . Tutte queste linee sono più lunghe della retta AB .

6. Si chiama piano o superficie piana, una superficie sopra la quale si possono tirare delle linee rette per ogni verso: tale è la parte superiore d'una tavola ben levigata, o d'un foglio di carta ben teso. Ogni superficie che non ha questa proprietà, si chiama in generale superficie curva.

7. Le linee rette si tirano sulla carta, facendo scorrere, lungo una riga ben diritta, una penna o lapis, che si lascia dietro una striscia d'inchiostro, di ematita o di miniera di piombo ec. Sopra il terreno si piantano di distanza in distanza delle paline nella dirittura d'un medesimo raggio visuale; e da una palina all'altra si disegnano de' solchi che si uniscono capo a capo l'uno all'altro, e formano così una linea retta continua.

Tutte le linee, quelle eziandio che si tirano sopra la carta, hanno della larghezza, perchè la punta d'una penna o d'un lapis ha sempre una certa superficie, e perchè altronde egli è necessario che le linee appariscano sensibili a' nostri occhi. Ma si deve prescindere dalla loro larghezza, e non considerare in esse se non la lunghezza.

Le lunghezze delle linee si paragonano fra loro col riferirle ad una medesima unità. Così, per esempio, la distanza da Parigi a Lione essendo di 100 leghe, e quella da Parigi a Lilla essendo di 52 leghe, vedo che queste due distanze stanno fra loro nel rapporto di 100 a 52, ossia di 25 a 13.

8. Due linee BA , CA (Fig. 2, 3, 4) che s'incontrano in un punto A , formano un'apertu-

4
ra BAC che chiamasi *angolo*. Quest'angolo è *rettilineo* (Fig. 2), quando i suoi *lati* o *gambe* BA , CA sono linee rette: è *curvilineo* (Fig. 3) quando i suoi lati sono linee curve, è *mistilineo* (Fig. 4), quando un lato è retto, e l'altro curvo.

Si deve badar bene che un angolo non è già lo spazio compreso fra i suoi lati, ma unicamente l'inclinazione che hanno i suoi lati, l'uno per rispetto all'altro, nella loro intersezione A . Quindi la grandezza d'un angolo non dipende punto dalla lunghezza de' suoi lati; di modo che, se si prolungano, per esempio, i lati BA , CA dell'angolo rettilineo BAC (Fig. 2) verso D ed E , questi lati, benchè divenuti più lunghi, conserveranno sempre, l'uno per riguardo all'altro, la medesima situazione o inclinazione, ossia formeranno sempre il medesimo angolo. Lo stesso s'intenda per gli angoli curvilinei e mistilinei. Imperciocchè, per esempio, l'angolo curvilineo BAC (Fig. 3), è la medesima cosa dell'angolo rettilineo MAN formato dalle rette MA , NA che toccano le curve AB , AC nel vertice A , e che hanno per conseguenza le medesime direzioni di queste curve alla loro origine; esso dunque rimane sempre costante, qualunque sia la lunghezza de' suoi lati BA , CA .

Un angolo si indica d'ordinario con tre lettere, delle quali quella di mezzo corrisponde al vertice o alla punta dell'angolo; ma qualche volta non si adopra che la semplice lettera del vertice.

Avverto, una volta per sempre, che quando nel decorso parlerò d'angoli, avrò in vista gli angoli rettilinei, a meno che non dica espressamente il contrario.

Avverto altresì che le figure di cui parlerò,

saranno supposte delineate sopra un medesimo piano; i casi d'eccezione saranno formalmente enunciati.

9. Quando due linee rette CE , DB (Fig. 5) si tagliano, esse formano l'una rispetto all'altra, degli angoli che si appellano *angoli conseguenti*. Così, essendo il punto A l'intersezione di queste due linee, CAB , CAD sono angoli conseguenti; parimente CAD , DAE sono angoli conseguenti.

10. Se (Fig. 6) la retta CE cade *perpendicolarmente*, ossia senza inclinare da alcuna parte, sopra DB : ovvero, ciò che torna allo stesso, se i due angoli conseguenti CAB , CAD sono eguali, ciascuno di essi chiamasi *angolo retto*.

11. Si chiama *angolo acuto* quello che è minore dell'angolo retto; ed *angolo ottuso* quello che è maggiore dell'angolo retto. Così, nella Figura 5, CAB è un angolo acuto, CAD è un angolo ottuso.

12. Ogni superficie limitata nella sua estensione, è terminata da linee che la circondano e la circoscrivono. Queste linee che si chiamano i *lati* della figura, possono essere rette o curve, o in parte rette ed in parte curve. Nel primo caso, la figura chiamasi *figura rettilinea* o *poligono rettilineo*: nel secondo, figura o poligono *curvilineo*: nel terzo, figura o poligono *mistilineo*.

La misura de' poligoni rettilinei è uno degli oggetti della Geometria elementare; tra i poligoni curvilinei, il *cercchio* che definiremo fra poco, è il solo di cui ella consideri le proprietà.

13. I poligoni rettilinei hanno differenti nomi secondo il numero de' loro lati. Si chiama *triangolo* quello che ne ha tre: *quadrilatero*, quello

che ne ha quattro: *pentagono*, quello che ne ha cinque: *esagono*, quello che ne ha sei: *eptagono*, quello che ne ha sette: *ottagono*, quello che ne ha otto, ec.

14. Si distinguono sei specie di triangoli: tre per rapporto ai lati, e tre per rapporto agli angoli.

1.^o Per rapporto ai lati, chiamasi *triangolo equilatero*, quello ABC (Fig. 7) che ha i suoi tre lati AB , BC , CA , eguali fra loro: *triangolo isoscele*, quello ABC (Fig. 8), che ha solo due lati AB , AC , eguali: *triangolo scaleno*, quello ABC (Fig. 9) che ha i suoi tre lati disuguali.

2.^o Per rapporto agli angoli, si chiama *triangolo rettangolo*, quello ABC (Fig. 10.) che ha un angolo retto B : *triangolo ottusangolo*, quello ABC (Fig. 11) che ha un angolo ottuso B : *triangolo acutangolo*, quello ABC (Fig. 12) che ha i suoi tre angoli acuti.

15. Nel triangolo rettangolo ABC (Fig. 10.) i lati BA , BC che comprendono l'angolo retto B , ritengono il semplice nome di lati; ma quello AC che è opposto all'angolo retto B , dicesi *ipotenusa*.

16. Si chiama in generale *base* d'un triangolo, il lato BC sopra il quale s'immagina che esso si appoggi. La stessa denominazione ha luogo, in tutte le figure ed in tutti i solidi, pel lato o la faccia che è come l'appoggio della figura o del solido.

La punta di ciascun angolo d'un triangolo può esserne considerata come il vertice per rapporto al lato opposto. Nel triangolo isoscele (Fig. 8), si dà più particolarmente il nome di *base* al lato BC che non ha eguale, ed il nome di *vertice* alla punta dell'angolo che è compreso fra i lati uguali.

17. Un poligono $ABCDEF$ (Fig. 13.) d'un numero qualunque di lati, che ha tutti i suoi lati eguali, e tutti i suoi angoli eguali, dicesi *regolare*. Le altre specie di poligoni sono *irregolari*.

18. Una retta AD , condotta da un angolo di un poligono ad un altro angolo, si chiama comunemente *diagonale*. Questa denominazione è principalmente usitata nel quadrilatero.

19. Il *cerchio* è una figura terminata da una linea curva $ABOD$ (Fig. 14) che chiamasi *circonferenza*, tutti i punti della quale sono egualmente distanti da un punto interno C che dicesi *centro*.

Il cerchio si può considerare come prodotto dal moto d'una retta CA che si rivolge intorno all'estremità C , e che porta, ad una distanza sempre costante dal centro C , un ago fisso in A , che descrive la circonferenza $ABOD$. A norma di questa nozione, si descrive il cerchio sulla carta, per mezzo dell'istromento detto *compasso*. Per descrivere la circonferenza d'un circolo sul terreno, invece del compasso, si fa uso d'una corda ben tesa, attaccata con uno de' suoi capi ad una palina fissa e *guernita* all'altro capo d'una palina che gira sul terreno, e vi segna la circonferenza.

20. Si chiama *raggio* ogni retta CA guidata dal centro alla circonferenza, e *diametro* ogni retta DB che passa pel centro, e termina dall'una e dall'altra parte alla circonferenza. Si scorge immediatamente dalla generazione del cerchio, che tutti i raggi sono eguali. Tutti i diametri sono pure eguali, poichè ciascuno di essi è la somma di due raggi.

21. Una retta MN che termina da una parte e dall'altra alla circonferenza, senza passare pel

centro, chiamasi *corda*; le porzioni di circonferenza MON , MAN , che corrispondono alla corda MN , si chiamano *archi*.

22. Per una convenzione generale, che risale alla più rimota antichità, i Matematici dividono la circonferenza del circolo in 360 parti eguali che chiamano *gradi*: suddividono il grado in 60 parti uguali che chiamano *minuti*: il minuto in 60 parti uguali che chiamano *secondi*: il secondo in 60 parti uguali che chiamano *terzi*; così di seguito (a).

I gradi, minuti, secondi, terzi ec. si esprimono rispettivamente coi caratteri $^{\circ}$, $'$, $''$, $'''$ ec. che si scrivono in forma di esponenti alla destra delle cifre che esprimono i numeri. Così, per esempio, 25 gradi 46 minuti 37 secondi, si denotano con $25^{\circ} 46' 37''$.

Il medesimo numero di gradi, minuti, secondi ec. che vi è in una circonferenza, vi è altresì in un'altra più grande; solamente le parti della prima circonferenza sono minori di quelle della seconda. Così, se dal medesimo centro C (Fig. 15), si descrivano coi raggi differenti Ca , CA , le due circonferenze $abedf$, $ABEDF$; ai gradi ab , bc , cd , ec. della prima corrisponderanno in egual numero i gradi AB , BE , ED , ec. della seconda.

23. I corpi o i solidi che esistono in natura, hanno delle forme che possono variare all'infinito, in ragione della figura, delle dimensioni e del numero delle faccie onde sono terminati. Ma tut-

(a) All'antica divisione del cerchio che qui ricorda l'Autore, i Geometri Francesi ne hanno recentemente sostituita una nuova, di cui si fa cenno all'articolo 223 del Trattato d'Aritmetica premesso al presente Compendio.

ti i solidi de' quali si occupa la Geometria elementare, si riducono a tre, che sono il *Prisma*, la *Piramide* e la *Sfera*. Noi rimettiamo, per evitare quì ogni oscurità, le definizioni di questi solidi ai luoghi ove tratteremo specialmente delle loro misure.

24. Nel seguito di quest'Opera farò uso formalmente o tacitamente di alcuni *assiomi* e di alcuni *postulati*, che è bene di premettere.

Assioma I. *Un tutto è uguale alla somma di tutte le sue parti, ed è maggiore di ciascuna di esse in particolare.*

II. *Due quantità che sono eguali ciascuna ad una terza quantità, sono eguali fra loro.*

III. *Se a due grandezze uguali si aggiungono la medesima quantità o delle quantità eguali: ovvero se da due grandezze uguali si sottraggono la medesima quantità o delle quantità uguali; le somme o le differenze saranno eguali.*

IV. *Se a due grandezze disuguali si aggiungono la medesima quantità o delle quantità eguali: ovvero se da due grandezze disuguali si sottraggono la medesima quantità o delle quantità uguali: le somme o le differenze saranno disuguali; e la somma maggiore o la differenza maggiore sarà dalla parte della maggiore delle due quantità disuguali.*

V. *Due linee o due superficie sono eguali, allorchè essendo sovrapposte l'una all'altra, si combaciano o si cuoprono perfettamente. Medesimamente, due angoli sono eguali, se il vertice dell'uno essendo collocato sopra il vertice dell'altro, i lati del primo cadono sopra quelli del secondo, o piuttosto hanno la medesima direzione di quelli del secondo, giacchè la grandezza degli angoli non dipende dalla lunghezza dei loro lati.*

Questo assioma è quello che chiamasi *principio di sovrapposizione*: noi ne faremo un uso frequente.

VI. Tutti gli angoli retti sono eguali fra loro. Quindi la somma di due angoli retti è uguale alla somma di due altri angoli retti: il doppio di un angolo retto è doppio d'un altro angolo retto: la metà d'un angolo retto è uguale alla metà di un altro angolo retto, ec.

Postulato I. Di poter condurre una linea retta da un punto ad un altro qualunque.

II. Di poter prolungare, quanto si voglia, una linea proposta, ossia d'immaginare che questa linea sia prolungata.

III. Di poter descrivere un cerchio da qualsivoglia centro e con un raggio qualunque, o d'immaginare che questo cerchio sia descritto.

C A P O II.

Proprietà dell'incontro scambievole delle linee rette.

25. **L**e linee rette, nell'incontrarsi, formano degli angoli o de' circuiti di triangoli e di poligoni. Hanno adunque fra loro o per le loro semplici posizioni rispettive o per la combinazione delle loro posizioni e delle loro grandezze, dei rapporti che si tratta di esaminare.

26. **TEOREMA I.** Ogni angolo ACB (Fig. 16) può essere misurato dall'arco di cerchio AB descritto dal vertice C come centro, con un raggio arbitrario fra i suoi lati CA , CB .

Di fatti, noi possiamo concepire che l'angolo ACB sia prodotto dalla rotazione del lato CB che si rivolge intorno al punto C , mentre il la-

to CA rimane immobile. Suppongo adunque che nel primo istante il lato CB sia sovrapposto al lato CA , e che ciascun punto B sia confuso con ciascun punto A : egli è chiaro che a misura che il punto B cammina e descrive l'arco AB , si formano successivamente i piccoli angoli ACb , bCb , bCb ec.; di modo che vi sono altrettanti di questi piccoli angoli, quante vi sono parti Ab , bb , bb , ec. nell'arco AB . Ora la somma di tutti questi piccioli angoli non è altra cosa che l'angolo proposto ACB . Dunque questo angolo è proporzionale al numero delle parti dell'arco AB , ossia può essere misurato da questo arco medesimo.

27. Osservazione. Abbiamo preso ad arbitrio il raggio CA , perchè nell'arco AB vi è il medesimo numero di parti relativamente alla circonferenza intera del cerchio, qualunque sia la lunghezza del raggio. Se il raggio diventa doppio o triplo, le parti diventano doppie o triple in lunghezza, ma nell'arco AB ve ne ha sempre lo stesso numero, e l'angolo ACB non subisce alcuna variazione.

28. **COROLLARIO.** Gli angoli eguali hanno per misure archi eguali.

Intendo, archi eguali in numero di parti delle circonferenze alle quali appartengono. Se i raggi sono eguali, non solo gli archi saranno eguali in numero di parti delle circonferenze rispettive, ma queste parti esse stesse saranno eguali in lunghezza.

Bisogna ricordarsi che gli archi hanno i loro centri ai vertici degli angoli di cui essi sono le misure.

29. **TEOREMA II.** Se due angoli ACB , acb , (Fig. 17 e 18) sono eguali, o ciò che torna

allo stesso, se gli archi AMB , amb , descritti dai vertici C , c come centri, con raggi uguali che misurano questi angoli, sono eguali; le corde AB , ab che loro corrispondono, saranno eguali. E reciprocamente, se le corde AB , ab sono eguali; gli archi AMB , amb , ossia gli angoli ACB , acb , saranno eguali.

Imperciocchè, se si colloca il vertice c sopra il vertice C , e il punto a sopra il punto A , egli è chiaro che per l'eguaglianza de' raggi ca , CA , e per l'uniformità di curvatura che regna negli archi amb , AMB , le parti corrispondenti di questi due archi si copriranno scambievolmente; il punto b cadrà sopra il punto B , l'arco intero amb sopra l'arco intero AMB , la corda ab sopra la corda AB , il lato cb sopra il lato CB . Dunque l'uguaglianza degli angoli ACB , acb , ossia degli archi che ne sono le misure, importa l'uguaglianza delle corde AB , ab ; e reciprocamente l'uguaglianza delle corde importa quella degli archi o degli angoli.

30. PROBLEMA I. Fare un angolo che sia uguale ad un angolo dato ACB (Fig. 17), o che ne sia multiplo un certo numero di volte.

Dal vertice C , col raggio arbitrario CA , descrivo l'arco AMB che è la misura dell'angolo proposto ACB , e guido la corda AB . Sopra una linea indefinita cz (Fig. 19) prendo la parte $ca = CA$: descrivo dal punto c come centro l'arco indefinito $ambd$, in seguito dal punto a come centro, con un raggio ab eguale alla corda AB , descrivo un arco di cerchio che tagli l'arco $ambd$ nel punto b : tiro la retta cb , ed ho con ciò l'angolo acb eguale all'angolo proposto ACB , poichè i raggi ca , CA sono eguali, e lo sono

pure le corde ab , AB . Nello stesso modo si farà ciascuno degli angoli bcd , dce ec. eguale all'angolo ACB . Laonde si vede che l'angolo acd sarà doppio dell'angolo ACB ; che l'angolo ace ne sarà triplo; ec.

31. TEOREMA III. La somma di due angoli conseguenti ECA , ECB (Fig. 20) vale sempre due angoli retti.

Imperciocchè, se si immagina che dal punto C s'innalzi sopra AB la perpendicolare CD , si vedrà che la somma de' due angoli ECM , ECB vale la somma de' due angoli retti CDM , DCB . Diffatti l'angolo ottuso ECM supera l'angolo retto DCM , dello stesso angolo ECD , di cui l'angolo retto DCB supera l'angolo acuto ECB .

32. Osservazione. Si chiamano *complementi* l'uno dell'altro due angoli che presi insieme valgono un angolo retto: e *supplementi* l'uno dell'altro, due angoli che presi insieme valgono due angoli retti. Così i due angoli ECB , ECD sono complementi l'uno dell'altro: i due angoli ECB , ECA sono supplementi l'uno dell'altro.

Egli è chiaro che gli angoli eguali hanno dei complementi eguali o de' supplementi eguali: e che reciprocamente gli angoli, che hanno complementi eguali o supplementi eguali, sono eguali.

33. COROLLARIO I. Se dal punto C , come centro, (Fig. 21), con un raggio arbitrario, si descriva una circonferenza di cerchio che incontri la retta AB ne' punti A e B : egli è chiaro che l'arco AEB sarà la metà della circonferenza, e che questa metà sarà la misura de' due angoli conseguenti ECA , ECB , presi insieme. L'angolo retto DCM o DCB ha dunque per misura il quarto dell'intera circonferenza: l'angolo

ottuso $EC\mathcal{A}$ ha per misura un arco maggiore del quarto della circonferenza: l'angolo acuto ECB ha per misura un arco minore del quarto della circonferenza.

34. COROLLARIO II. La retta DE (Fig. 22) essendo supposta perpendicolare ad AB , reciprocamente AB è perpendicolare a DE : Imperciocchè l'angolo $DC\mathcal{A}$ essendo retto per ipotesi, se si pretendesse che l'angolo ACE non lo fosse, immaginerei che al punto C s'innalzasse Ca perpendicolare a DE : allora i due angoli conseguenti DCa , aCE sarebbero retti ed uguali. Di più, l'angolo DCa sarebbe uguale all'angolo $DC\mathcal{A}$ (24. Ass. VI.); il che è impossibile, a meno che Ca non si confonda con $C\mathcal{A}$, cioè a dire, a meno che AC non sia perpendicolare a DE .

Si proverà nella stessa maniera che BC è perpendicolare a DE . Quindi i quattro angoli $DC\mathcal{A}$, ACE , ECB , BCD sono retti, e se dal punto C , come centro, si descriva una circonferenza di cerchio, ciascuno di essi avrà per misura il quarto di questa circonferenza.

35. COROLLARIO III. Allorchè due linee AC , CF (Fig. 23.) non sono in linea retta, ovvero formano una linea spezzata in C , la somma de' due angoli $EC\mathcal{A}$, ECF , che hanno i loro vertici nel punto C , ed il lato comune EC , vale più o meno di due angoli retti; poichè, prolungando AC verso B , la somma de' due angoli $EC\mathcal{A}$, ECB vale due angoli retti: e per ipotesi, CF non cade sopra CB . E reciprocamente, se la somma de' due angoli $EC\mathcal{A}$, ECF vale più o meno di due angoli retti, la linea ACF sarà spezzata in C ; poichè CF cadrà evidentemente al di fuori o al di dentro dell'angolo ECB .

36. COROLLARIO IV. Se ad un medesimo punto C della retta AB (Fig. 24) si guida un numero qualunque di linee GC , EC , FC ; la somma di tutti gli angoli ACG , GCE , ECF , FCB vale due angoli retti, poichè la somma di tutti questi angoli è la stessa cosa della somma dei due angoli conseguenti ACE , ECB .

37. COROLLARIO V. La somma d'un numero qualunque d'angoli HCG , GCE , ECF , FCK , KCI , ICH , (Fig. 25), formati intorno al medesimo punto C , vale quattro angoli retti; perciocchè, se pel punto C si conduce la retta AB , ciascuna delle somme d'angoli posti dalle due parti di questa linea, vale due angoli retti.

38. TEOREMA IV. Se due rette AB , ED , (Fig. 26) si tagliano, gli angoli ECB , ACD (che si chiamano Angoli opposti al vertice) saranno uguali. Così pure, gli angoli ECA , BCD , opposti al vertice, saranno uguali.

Imperciocchè la somma dei due angoli conseguenti ECB , $EC\mathcal{A}$ vale due angoli retti: come pure la somma de' due angoli conseguenti ACD , ACE vale due angoli retti; dunque queste due somme sono uguali. Levando da ambe le parti l'angolo ACE , resterà l'angolo ECB eguale all'angolo ACD .

Si proverà nella stessa maniera che l'angolo $EC\mathcal{A}$ è uguale all'angolo BCD .

39. TEOREMA V. La retta CD (Fig. 27) essendo supposta perpendicolare sopra il mezzo E della retta AB , ogni punto, come F , situato sopra CD , è egualmente distante dalle estremità A e B della linea AB .

Imperciocchè immaginiamoci che la parte $CE\mathcal{A}$ della figura rimanendo immobile, si faccia girare

l'altra parte CEB sopra CE , come sopra una cerniera; egli è chiaro che essendo uguali i due angoli CEB , CEA , ed essendo eguali le due linee EB , EA ; egli è chiaro dico, che dopo una mezza rivoluzione, EB cadrà sopra EA , il punto B sopra il punto A , la retta FB sopra la retta FA ; dunque (24. Ass. V.) le due rette FB , FA sono eguali, o ciò che torna allo stesso, il punto F è equidistante dai punti B ed A .

40. COROLLARIO. Dunque due oblique FA , FB che si allontanano egualmente dalla retta CD perpendicolare ad un'altra linea AB , sono eguali. Gli allontanamenti di cui si tratta, sono misurati dalle rette uguali EA , EB .

41. TEOREMA VI. La retta CD (Fig. 28) essendo sempre supposta perpendicolare sopra il mezzo di AB , ogni punto G che non è posto sopra questa perpendicolare, non è equidistante dai punti A e B .

Dal punto G conducete ai punti A e B le rette GA , GB , e dal punto F in cui GB taglia CD , tirate al punto B la retta FB . Si avrà (39) $FA = FB$. Aggiugnendo FG dall'una e dall'altra parte, si avrà (24. Ass. III.) $GA = FB + FG$; ma (5) $FB + FG > GB$; dunque altresì $GA > GB$, o ciò che torna allo stesso, il punto G è più distante dal punto A che dal punto B .

42. COROLLARIO. Da ciò si scorge che un punto non può essere egualmente distante dalle estremità d'una linea, senza essere situato sulla perpendicolare al mezzo di questa linea.

Da questo principio si ricava la soluzione dei tre problemi che seguono.

43. PROBLEMA II. Condurre una linea che
sia

sia perpendicolare sopra il mezzo d'una retta data AB (Fig. 29.).

Dai punti A e B , col medesimo raggio arbitrario, ma maggiore della metà di AB (*), descrivete due archi di cerchio MO , PQ , che si taglino in F : dai medesimi punti descrivete, col medesimo raggio, due altri archi di cerchio, che si taglino in f : guidate pei punti F ed f la retta CD ; ella sarà perpendicolare sopra il mezzo di AB ; poichè ciascuno dei due punti F ed f essendo equidistante dai punti A e B , è situato nella perpendicolare sopra il mezzo di AB .

44. Osservazione. Lo stesso metodo serve a dividere una linea retta in due parti eguali.

45. PROBLEMA III. Da un punto dato E sopra la linea KH (Fig. 30) innalzare una perpendicolare a questa linea.

Dal punto E , come centro, con un raggio arbitrario, descrivete la semicirconferenza AZB , che seghi KH (prolungata, se fa bisogno) nei punti A e B , e che dia $EB = EA$. In seguito dai punti A e B , con un raggio arbitrario, ma maggiore di EB o di EA , descrivete due archi di cerchio MO , PQ che si taglino in F : tirate, pei punti F ed E , la retta CD ; ella sarà perpendicolare ad AB .

46. PROBLEMA IV. Da un punto F situato fuori d'una linea KH (Fig. 31), abbassare una perpendicolare a questa linea.

Dal punto F , come centro, descrivete l'arco AZB , che seghi nei punti qualunque A e B la retta KH , prolungata, quanto è necessario: da

(a) Questa condizione è posta perchè gli archi MO , PQ possano tagliarsi.

questi due punti, come centri, con altro raggio, descrivete due archi di cerchio mo , pq che si taglino in f : tirate, pei punti F ed f , la retta CD ; essa sarà perpendicolare ad AB ossia a KH .

47. LEMMA. Se da un punto D posto dentro un triangolo ACB (Fig. 32.), conducansi le rette DA , DB : la somma di queste due linee sarà minore della somma dei lati CA , CB .

Prolungate AD sino in E : avrete (5) 1.° $BD < EB + ED$. Aggiugnendo dall'una e dall'altra parte DA , verrà $BD + DA < EB + EA$. 2.° Avrete $EA < CA + CE$. Aggiugnendo da ambe le parti EB , verrà $EB + EA < CA + CB$. Dunque, a maggior ragione, $BD + DA < AC + CB$.

48. TEOREMA VII. Fra tutte le linee che si possono condurre da un punto qualunque F (Fig. 33) ad una retta KH , la più breve è la perpendicolare FE ; e delle due oblique FA , FK , che si scostano inegualmente dalla perpendicolare, la più breve è quella FA che se ne scosta meno.

Prolungate FE della quantità $ED = EF$: tirate le rette AD , KD . In seguito considerate che le rette FD , KH essendo perpendicolari l'una all'altra, ciascuno dei punti di KH sarà egualmente distante dai punti F ed D (39). Dunque $AD = AF$, e $KD = KF$. Ma (5) $FD < FA + AD$: e per l'articolo precedente, $FA + AD < FK + KD$. Dunque, prendendo la metà, si avrà $FE < FA$, ed $FA < FK$. Laonde si vede 1.° che la perpendicolare FE è più breve di ciascuna delle oblique FA , FK ; 2.° che di queste oblique la più breve è quella FA che si scosta meno dalla perpendicolare FE .

49. COROLLARIO I. Da un medesimo punto F non si può condurre che una sola perpendicola-

re ad una retta KH ; poichè non vi è che una sola linea che sia la più breve di tutte quelle che si possono condurre dal punto F alla retta KH : Questa perpendicolare esprime la distanza del punto F dalla retta KH .

50. COROLLARIO II. Se dal punto F si guidano alla retta KH due oblique FA , FH , le quali si scostino egualmente dalla perpendicolare, cioè a dire tali che sia $EH = EA$: queste due oblique saranno eguali (40). Ma non si può condurre dal punto F a KH una terza linea eguale ad FA o ad FH ; perciocchè bisognerebbe che ella cadesse dalla medesima parte di una delle due oblique proposte: ed ella sarebbe più o meno lunga di questa obliqua, poichè si scosterebbe più o meno dalla perpendicolare.

51. TEOREMA VIII. Due triangoli qualunque ABC , DEF (Fig. 34 e 35) sono eguali in tutto, o (come si dice) sono perfettamente uguali quando hanno un angolo eguale compreso fra lati eguali ciascuno a ciascuno; cioè a dire, quando, per esempio, l'angolo D è uguale all'angolo A , il lato DE eguale al lato AB , ed il lato DF eguale al lato AC .

Collocate il vertice D sopra il vertice A , il lato DE sopra il lato AB . Essendo $DE = AB$, il punto E cadrà sopra il punto B : ed essendo l'angolo D eguale all'angolo A , il lato DF avrà la stessa direzione di AC ; finalmente, per essere DF eguale ad AC , il punto F cadrà sopra il punto C , e le linee EF , BC si copriranno esattamente l'una l'altra. Dunque anche i nostri due triangoli si cuoprano perfettamente l'uno l'altro, e sono per conseguenza in tutto eguali.

52. Osservazione. E' da notarsi che nei due

triangoli di cui trattasi, gli angoli eguali sono opposti ai lati eguali. Lo stesso avviene in tutti i casi di due triangoli perfettamente uguali. Gli angoli eguali sono opposti ai lati eguali, e reciprocamente. Questa osservazione è essenziale, ed avrà delle frequenti applicazioni nel seguito.

53. TEOREMA IX. Due triangoli qualunque ABC , DEF sono perfettamente uguali, quando hanno un lato eguale adjacente a due angoli uguali; cioè a dire, per esempio, se $EF = BC$, ed angolo $E =$ angolo B , angolo $F =$ angolo C .

Collocate il lato EF sopra il lato BC , il punto E sul punto B , e per conseguenza il punto F sopra il punto C . Essendo eguali gli angoli E e B , avrà ED la medesima direzione di BA ; e gli angoli F e C essendo eguali, FD avrà la medesima direzione di CA . Laonde si vede che i due triangoli coincideranno esattamente l'uno coll'altro, e saranno in tutto eguali.

54. TEOREMA X. Due triangoli qualunque ABC , DEF sono perfettamente uguali quando hanno i tre lati eguali ciascuno a ciascuno, cioè a dire, se $EF = BC$, $ED = BA$, $FD = CA$.

Il vertice A del triangolo ABC può essere considerato come l'intersezione di due archi di cerchio, descritti dai punti B e C , come centri, coi raggi BA , CA : così pure il vertice D del triangolo DEF può essere considerato come l'intersezione di due archi di cerchio descritti dai punti E ed F , come centri, coi raggi ED , FD . Si sovrapponga il lato EF al lato BC : egli è chiaro che i due archi di cerchio, descritti coi raggi eguali BA , ED si confonderanno, e che i due archi di cerchio, descritti coi raggi eguali CA , FD , si confonderanno. Dunque i due pun-

ti d'intersezione A e D non ne formeranno che un solo; ed il triangolo DEF coinciderà esattamente col triangolo ABC ; dunque questi due triangoli sono perfettamente uguali.

55. TEOREMA XI. Due triangoli ABC , DEF (Fig. 36 e 37), rettangoli in B ed E , sono perfettamente uguali quando i lati AB , DE sono eguali, e le ipotenuse AC , DF sono altresì eguali.

Sovrapponete il lato DE al lato AB , gli angoli retti E e B essendo eguali, EF avrà la medesima direzione di BC . Inoltre considerando i punti C ed F come le intersezioni delle rette BC , EF con due archi di cerchio, descritti dai punti A e D come centri, coi raggi AC , DF ; si vedrà che essendo $DF = AC$, le due intersezioni di cui si tratta, si confonderanno, e che il triangolo DEF si confonderà esattamente col triangolo ABC ; dunque questi due triangoli sono perfettamente uguali.

56. SCOLIO I. Dai Teoremi VIII, IX, X seguono tre maniere di fare un triangolo perfettamente uguale ad un altro triangolo qualunque: e dal Teorema XI. segue il modo di fare un triangolo rettangolo perfettamente uguale ad un altro triangolo rettangolo, del quale si conoscono uno de' lati e l'ipotenusa.

I. Se nel triangolo ABC (Fig. 34) conoscete l'angolo A ed i lati AB , AC , formerete il triangolo DEF (Fig. 35), che gli sarà perfettamente uguale, facendo (30) l'angolo $D =$ all'angolo A , e prendendo $DE = AB$, $DF = AC$, poi tirando EF , (Teor. VIII.).

II. Se nel triangolo ABC vi sono noti il lato BC , e gli angoli B e C , formerete il triangolo

DEF che gli sarà perfettamente uguale, prendendo $EF = BC$, e facendo l'angolo $E =$ all'angolo B , e l'angolo $F =$ all'angolo C (Teor. IX.).

III. Se nel triangolo ABC vi sono noti i tre lati, formerete il triangolo DEF , che gli sarà perfettamente uguale, prendendo $EF = BC$, e descrivendo dal punto E , come centro, con un raggio $= BA$, un arco di cerchio, e dal punto F , come centro, con un raggio $= CA$, un altro arco di cerchio, che tagli il primo: poi tirando a questo punto d'intersezione le rette ED , FD (Teor. X.).

IV. Se in un triangolo rettangolo ABC (Fig. 36) conoscete uno AB de' lati, e l'ipotenusa AC , formerete il triangolo DEF (Fig. 37) che gli sarà perfettamente uguale, prendendo prima $DE = AB$, alzando (45) al punto E , sopra ED , la perpendicolare indefinita EF , poi descrivendo dal punto D come centro, con un raggio $= AC$, un arco di cerchio che tagli EF nel punto F (Teor. XI.).

57. SCOLIO II. Due poligoni in generale, sono perfettamente eguali, allorchè sono composti di triangoli che soddisfano alle condizioni enunziate nei Teoremi citati, e sono similmente disposti da un poligono all'altro.

C A P O III.

Delle linee parallele: diversi usi delle loro proprietà.

58. Se da tutti i punti C, C, C, C , d'una retta AB (Fig. 38) s'innalzino sopra questa linea delle perpendicolari eguali CD, CD, CD ,

CD ; ed in seguito da ciascun punto D al punto vicino D si conduca una lineetta retta: l'aggregato di tutte queste lineette formerà una linea continua che chiamo *parallela* ad AB .

59. COROLLARIO. Segue da questa definizione, che la linea $DDDD$ è *retta*. Imperciocchè essendo tutti i punti D egualmente distanti dalla retta AB , egli è chiaro che la linea $DDDD$ non può, in alcun luogo del suo corso, formare concavità nè convessità verso AB , e che conseguentemente tutti i suoi punti sono situati sopra una sola e medesima direzione rettilinea EF . Di fatti, se si concepisce che la retta AB rimanendo immobile, tutte le rette eguali DC, DC, DC, DC , alle quali non si è data alcuna lunghezza determinata, vengano a diminuire continuamente ciascuna della stessa quantità: i punti D , nell'accostarsi ai punti C , conserveranno sempre fra loro, e per rapporto ad AB , la medesima situazione. Ora, quando le linee DC diventano affatto nulle, i punti D si confondono coi punti C , e la linea intera EF si confonde colla retta AB , il che non potrebbe avvenire, se EF non fosse una linea retta.

60. TEOREMA I. La retta EF (Fig. 39) essendo supposta parallela alla retta AB , se da un punto qualunque C , preso sopra AB , s'innalzi a questa linea la perpendicolare CD , che incontri EF in D : questa linea CD sarà altresì perpendicolare ad EF .

Prendete arbitrariamente, dall'una e dall'altra parte del punto C , le rette eguali CK, CG : dai punti K, G alzate sopra AB le perpendicolari KL, GH , e tirate le diagonali CL, CH . Essendo la linea EF parallela ad AB , si avrà (58) $KL =$

GH . Dunque i due triangoli rettangoli CKL , CGH sono perfettamente eguali, (51); poichè $CK=CG$, $KL=GH$, ed angolo $K=$ angolo G . Quindi l'angolo $KCL=$ all'angolo GCH , $CL=CH$. Sottraendo gli angoli KCL , GCH dagli angoli retti eguali KCD , GCD resterà l'angolo $LCD=$ all'angolo HCD ; dunque (51) i due triangoli CDL , CDH sono perfettamente eguali, siccome aventi un angolo eguale compreso fra lati eguali ciascuno a ciascuno. Dunque i due angoli conseguenti CDL , CDH sono eguali; e per conseguenza ciascuno di essi è retto, ossia, ciò che torna allo stesso, CD è perpendicolare ad EF .

61. COROLLARIO I. Dunque la linea EF (Fig. 38) essendo supposta parallela ad AB , si può dire altresì che AB è reciprocamente parallela ad EF ; poichè le linee eguali CD , CD , CD , riguardate come perpendicolari ad AB , sono reciprocamente perpendicolari ad EF .

62. COROLLARIO II. Dunque due rette parallele AB , EF sono da per tutto equidistanti l'una dall'altra, siccome perpendicolari in ciascuno de' loro punti ad una serie di linee rette eguali CD , CD , CD , che esprimono ciascuna (49) la distanza del punto D dalla retta AB , ovvero la distanza del punto C dalla retta EF .

63. COROLLARIO III. Di qui ne segue il modo di condurre (Fig. 40) da un punto D , dato o preso ad arbitrio, una parallela alla retta AB . Dal punto D abbassate (46) la retta DC perpendicolare ad AB ; e da questo stesso punto innalzate (45) DF perpendicolare a DC : questa retta DF sarà parallela ad AB .

64. COROLLARIO IV. Se, avendo condotte le perpendicolari CD , MN alle due parallele

AB , EF , si prendano da una stessa parte le porzioni CR , MO , eguali fra loro, e si conducano le oblique RD , ON : queste oblique saranno eguali, e le parti RO , DN delle linee AB , EF , saranno eziandio eguali. Imperciocchè 1.º i due triangoli rettangoli DCR , NMO sono perfettamente eguali (51), siccome aventi un angolo eguale compreso fra lati eguali ciascuno a ciascuno 2.º Se si tira la retta DM , i due triangoli DCM , DNM , che hanno la medesima ipotenusa, ed il lato $DC=NM$, sono perfettamente eguali (55); donde risulta $CM=DN$. 3.º Levando OM da CM , ed aggiugnendo CR che è uguale ad OM , si avrà $RO=CM=DN$.

65. TEOREMA II. Se le rette parallele AB , EF (Fig. 41) sono tagliate da una retta KL : gli angoli HDB , EHD (che si chiamano Angoli alterni interni) saranno eguali.

Imperciocchè, se dai punti H e D si conducano alle due parallele le perpendicolari HO , DG , i due triangoli rettangoli HOD , DGH , che hanno la medesima ipotenusa ed i lati HO , DG eguali (62), sono perfettamente eguali (55); dunque l'angolo $HDO=$ all'angolo DHG .

66. COROLLARIO. Di qui ne segue, 1.º che gli angoli HDB , KHF (che si chiamano Angoli interno e esterno dalla stessa parte) sono eguali; poichè l'angolo KHF è uguale (38) al suo opposto al vertice EHD , che si è dimostrato eguale ad HDB .

2.º Che gli angoli KHF , ADL (che chiamansi Angoli alterni esterni) sono eguali; poichè sono opposti verticalmente ad angoli eguali.

3.º Che gli angoli Alterni interni FHD , ADH sono eguali; siccome supplementi di angoli egua-

li. Per la stessa ragione, gli angoli *Alterni esterni* KHE , BDL sono eguali.

4.^o Che la somma dei due angoli FHD , BDH (che chiamansi *Angoli interni dalla stessa parte*) vale due angoli retti; poichè la somma dei due angoli conseguenti FHK , FHD vale due angoli retti, e l'angolo FHK è uguale all'angolo HDB . Per una simile ragione, la somma dei due angoli *esterni dalla stessa parte*, FHK , BDL , vale due angoli retti.

67. TEOREMA III. *Reciprocamente, se due rette* AB , EF (Fig. 42) *sono tagliate da una retta* KL *per modo che gli angoli alterni interni* HDB , EHD *siano eguali; queste due linee* AB , EF *saranno parallele.*

Imperciocchè, se si pretende che EF non sia parallela ad AB , condurrò, pel punto H , la retta ef parallela ad AB : allora, pel teorema precedente, l'angolo eHD sarà uguale all'angolo HDB ; dunque l'angolo eHD sarà eguale all'angolo EHD ; il che non può essere, a meno che ef non cada sopra EF , ovvero che EF non sia parallela ad AB .

68. COROLLARIO. Le due linee AB , EF sono eziandio parallele 1.^o se gli angoli HDE , KHF sono eguali; perciocchè l'angolo KHF essendo eguale all'angolo EHD (38), i due angoli EHD , HDB saranno eguali.

2.^o Se gli angoli KHF , ADL sono eguali; perciocchè allora gli angoli EHD , HDB , che loro sono opposti al vertice, saranno eguali.

3.^o Se gli angoli FHD , ADH sono eguali; ovvero se gli angoli KHE , BDL sono eguali; perciocchè da amendue queste supposizioni risulta l'angolo EHD = all'angolo HDB .

4.^o Se la somma dei due angoli FHD , BDH , ovvero se la somma dei due angoli FHK , BDL , vale due angoli retti; perciocchè si troverà facilmente che in conseguenza dell'una o dell'altra supposizione, gli angoli EHD , HDB saranno eguali.

69. TEOREMA IV. *La somma dei tre angoli d'un triangolo qualunque* ABC (Fig. 43) *vale sempre due angoli retti.*

Guidate, da uno degli angoli A , la retta MN parallela al lato opposto BC : gli angoli alterni interni ABC , BAM saranno eguali (65); e medesimamente gli angoli ACB , CAN saranno eguali. Dunque la somma dei tre angoli del triangolo BAC , vale la somma dei tre angoli BAM , BAC , CAN ; ora la somma di questi tre ultimi angoli vale due angoli retti (36); dunque anche la somma de' tre angoli del triangolo vale due angoli retti.

70. COROLLARIO I. Un triangolo non può avere che un solo angolo retto, ed a maggior ragione che un solo angolo ottuso. Ma può avere i suoi tre angoli acuti.

71. COROLLARIO II. Se la somma di due angoli d'un triangolo è uguale alla somma di due angoli d'un altro triangolo, il terzo angolo del primo triangolo sarà uguale al terzo angolo del secondo. Imperciocchè sottraendo le due somme proposte, ciascuna dai due angoli retti, i due angoli rimanenti saranno necessariamente uguali.

Quindi, per concludere che due triangoli hanno tutti i loro angoli eguali, ciascuno a ciascuno, basterà di conoscere che due angoli di uno di questi triangoli sono eguali ciascuno a ciascuno de' due angoli dell'altro triangolo.

72. COROLLARIO III. Se si prolunga uno BC de' lati d'un triangolo ABC , l'angolo ACD (che chiamasi *angolo esterno*) sarà uguale alla somma dei due angoli CBA , CAB (che si chiamano *angoli interni opposti*). Imperciocchè la somma dei due angoli ACD , ACB , è la somma dei tre angoli CBA , CAB , ACB , sono eguali tra loro, come aventi per valore comune due angoli retti; dunque, sottraendo da queste due somme, l'angolo ACB , resterà l'angolo ACD eguale alla somma de' due angoli CBA , CAB .

73. TEOREMA V. In qualunque triangolo, il lato maggiore è opposto all'angolo maggiore; e reciprocamente, l'angolo maggiore è opposto al lato maggiore.

Sia il triangolo ABC (Fig. 44.). Se, per esempio, l'angolo C è maggiore dell'angolo B , il lato AB sarà maggiore del lato AC : e reciprocamente, se il lato AB è maggiore del lato AC ; l'angolo C sarà maggiore dell'angolo B . Di fatti, abbassate dall'angolo A sul lato BC la perpendicolare AO : prendete $OD = OC$, e tirare DA ; i due triangoli rettangoli AOC , AOD saranno perfettamente uguali (51), come aventi un angolo eguale compreso fra lati eguali ciascuno a ciascuno; e per conseguenza l'angolo ADO è uguale all'angolo ACO . Ora, la somma dei tre angoli del triangolo AOD essendo eguale alla somma dei tre angoli del triangolo AOB , e questi due triangoli avendo l'angolo O comune, ne segue che, se l'angolo ACO ossia ADO è $> ABO$; l'angolo DAO sarà $<$ dell'angolo BAO . Dunque AB si scosterà più che AD dalla perpendicolare AO ; e per conseguenza (48) AB sarà $>$ AD ossia AC . Reciprocamente, se è $AB > AC$ ossia AD ; AB si scosterà più che AD dalla

perpendicolare AO ; dunque l'angolo BAO sarà $>$ dell'angolo DAO . Ora la somma dei tre angoli del triangolo AOD vale la somma dei tre angoli del triangolo AOB ; dunque, a motivo dell'angolo comune O , l'angolo ADO ossia ACB sarà $>$ dell'angolo ABC .

Si applicherà facilmente la medesima dimostrazione al triangolo della Figura 45.

74. COROLLARIO I. Poichè la disuguaglianza degli angoli C e B importa la disuguaglianza dei lati opposti AB , AC , e reciprocamente; ne segue che, se gli angoli C e B sono eguali, i lati AB , AC saranno altresì eguali, e reciprocamente.

Quindi un triangolo è isoscele, quando ha due angoli eguali; ed un triangolo è equilatero, quando i suoi tre angoli sono eguali.

75. COROLLARIO II. Due triangoli isosceli sono *equiangoli*, cioè a dire, hanno tutti i loro angoli eguali ciascuno a ciascuno, allorchè hanno soltanto due angoli corrispondenti uguali: cioè a dire, o l'angolo del vertice eguale all'angolo del vertice, o uno degli angoli della base eguale ad uno degli angoli della base. Imperciocchè 1.º Allorchè l'angolo del vertice è uguale all'angolo del vertice, la somma dei due angoli della base è uguale alla somma dei due angoli della base; e siccome in ciascun triangolo isoscele, gli angoli della base sono eguali, si vede che i tre angoli del primo triangolo saranno eguali ciascuno a ciascuno dei tre angoli del secondo. 2.º Allorchè un angolo della base di uno dei triangoli è uguale all'angolo della base dell'altro triangolo, i due altri angoli delle basi sono eziandio eguali. Dunque i due triangoli hanno i tre angoli eguali ciascuno a ciascuno.

Non abbiamo bisogno di far osservare che due triangoli equilateri sono sempre equiangoli; poichè ciascuno degli angoli di questi due triangoli è di 60 gradi.

76. TEOREMA IV. *Se in un quadrilatero ABCD (Fig. 46) i lati opposti sono paralleli, i lati opposti saranno eguali: e reciprocamente.*

Si conduca la diagonale BD : essendo i lati AD , BC paralleli, gli angoli alterni interni ADB , CBD sono eguali (65); e medesimamente essendo i lati AB , DC paralleli, gli angoli ABD , BDC sono eguali. Dunque (53) i due triangoli ABD , CBD sono perfettamente uguali, come aventi un lato eguale adjacente a due angoli eguali. Dunque $AD = BC$, ed $AB = DC$.

Reciprocamente, se in un quadrilatero i lati opposti sono eguali, questi lati sono paralleli a due a due. Imperciocchè allora (54) i due triangoli ABD , CBD sono perfettamente uguali, come aventi i tre lati uguali ciascuno a ciascuno. Dunque gli angoli ADB , CBD sono eguali, e conseguentemente le due linee AD , BC sono parallele (67); parimente, i due angoli ABD , CDB sono eguali, e per conseguenza le linee AB , CD sono parallele.

77. Osservazione. Si chiama *parallelogrammo*, un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli. E siccome un tal quadrilatero ha eziandio i lati opposti eguali, si può dire del pari che un parallelogrammo è un quadrilatero, i cui lati opposti sono eguali.

Vi sono più specie di parallelogrammi. Se un parallelogrammo, come quello della (Figura 46), ha due angoli acuti, e due angoli ottusi, dicesi *parallelogrammo obliquangolo*, o semplicemente *pa-*

rallelogrammo. Ed allorchè un parallelogrammo avendo due angoli acuti e due angoli ottusi, ha i suoi quattro lati eguali, chiamasi *rombo* (Fig. 47).

Un parallelogrammo che ha i suoi quattro angoli retti, si chiama *parallelogrammo rettangolo* o *rettangolo* (Fig. 48). Se i quattro angoli essendo retti, i quattro lati sono eguali, il rettangolo prende il nome di *quadrato* (Fig. 49).

Un quadrilatero (Fig. 50) che ha semplicemente due lati AD , BC paralleli, si chiama *trapezio*.

C A P O IV.

Dell'incontro delle linee rette colle linee circolari, e dell'incontro vicendevole delle linee circolari.

78. TEOREMA I. *Se dal centro C d'un cerchio (Fig. 51.) si abbassa la perpendicolare CO sulla corda AB: essa dividerà tanto la corda quanto l'arco AFB, in due parti eguali.*

Imperciocchè 1.º Poichè la retta CO è perpendicolare ad AB , ed il centro C , per dove passa, è egualmente distante dai punti A e B , ne segue (42) che questa linea passa pel mezzo di AB .

2.º La retta CO passa pel mezzo F dell'arco AFB . Imperciocchè, essendo perpendicolare sopra il mezzo di AB , ciascuno de'suoi punti (39) deve essere equidistante dai punti A e B . Ora il punto F è egualmente distante dai punti A e B , poichè gli archi FMA , FNB essendo supposti eguali, le corde FA , FB sono eguali (29). Dunque il punto F è situato sulla perpendicolare CO .

79. COROLLARIO I. Di qui si scorge che il centro del cerchio, il mezzo della corda, e il

32 mezzo dell'arco, sono tre punti sempre situati sopra la stessa linea che è perpendicolare alla corda. Ora due punti soli bastano per determinare la posizione d'una linea retta (5). Dunque ogni linea che passerà per due dei tre punti proposti, passerà necessariamente pel terzo, e sarà di più perpendicolare alla corda.

80. COROLLARIO II. Se conducasi una seconda corda MN parallela ad AB , i due archi MA , NB compresi fra queste due corde, saranno eguali. Imperciocchè la retta CO essendo perpendicolare ad AB , sarà altresì perpendicolare ad MN (60). Dunque il centro C , il punto E , mezzo di MN , il punto F , mezzo dell'arco MFN , sono situati sopra la perpendicolare CO . Ora poichè si ha $\text{arc. } FMA = \text{arc. } FNB$, ed $\text{arc. } FM = \text{arc. } FN$; se si sottrae, termine da termine, la seconda egualità dalla prima, si avrà $\text{arc. } MA = \text{arc. } NB$.

Reciprocamente, se i due archi MA , NB , situati dalla stessa parte di AB , sono eguali, la corda MN sarà parallela ad AB . Imperciocchè, conducendo CO perpendicolare ad AB , si avrà $\text{arc. } FMA = \text{arc. } FNB$. Sottraendo da questa equazione l'equazione $\text{arc. } MA = \text{arc. } NB$, si avrà $\text{arc. } FM = \text{arc. } FN$. Dunque la retta CO è eziandio perpendicolare ad MN . Ora, la linea CO essendo perpendicolare a ciascuna delle corde AB , MN , reciprocamente queste due corde sono ad essa perpendicolari; dunque elle formano colla medesima degli angoli alterni interni ADE , NED eguali, siccome retti; e per conseguenza (67) le due linee AB , MN sono parallele.

81. PROBLEMA I. Far passare una circonferenza di cerchio per tre punti dati A , B , D (Fig. 52).

Ti-

Tirate le rette AB , BD . Conducete (43) ME perpendicolare sul mezzo di AB , ed NF perpendicolare sul mezzo di BD . Dal punto C , ove queste due perpendicolari si tagliano, descrivete col raggio CA una circonferenza di cerchio: dico che ella passerà eziandio pei punti B e D , e che sarà conseguentemente la circonferenza domandata. Imperciocchè, essendo CE perpendicolare sul mezzo di AB , le rette CA , CB sono eguali (39). Medesimamente, essendo CF perpendicolare sul mezzo di BD , le rette CB , CD sono eguali. Dunque le tre linee CA , CB , CD sono eguali; dunque esse sono raggi della medesima circonferenza che passa pei tre punti proposti.

82. COROLLARIO. Il punto C d'intersezione delle perpendicolari ME , NF essendo unico: ne segue che pei tre punti A , B , D non si può far passare che una circonferenza di cerchio, e che conseguentemente due circonferenze di cerchio non possono passare pei tre punti medesimi, senza confondersi.

83. PROBLEMA II. Dividere un angolo dato ACB (Fig. 53) in due parti eguali.

Avendo descritto dal punto C , come centro, con un raggio arbitrario CA , l'arco AmB fra i lati dell'angolo proposto, descrivete dai punti A e B , come centri, con raggio parimenti arbitrario, due archi di cerchio che si taglino nel punto x . Guidate pel centro C e pel punto x la retta Cx : ella dividerà l'angolo ACB in due parti eguali. Imperciocchè, i punti C ed x essendo ciascuno egualmente distante dai punti A e B , sono situati (42) sopra una perpendicolare alla corda AB , la qual perpendicolare passa pel mezzo dell'arco AmB (78). Onde ne segue che i due angoli ACx ,

³⁴
 mCB che hanno per misure degli archi eguali, sono eguali, e sono conseguentemente ciascuno la metà dell'angolo ACB .

84. COROLLARIO. Operando nella stessa maniera, si può dividere ciascuno degli angoli ACm , mCB in due parti eguali; parimente, ciascuno degli angoli risultanti può essere diviso in due parti eguali; ciascuno di questi, in due parti eguali; e così di seguito. Laonde si vede che l'angolo primitivo ACB può essere diviso successivamente in un numero di parti eguali, espresse dai termini di questa progressione geometrica $\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : \text{ec.}$

85. TEOREMA II. *Un angolo che ha il suo vertice nella circonferenza d'un cerchio, e che è formato da due corde, ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.*

Abbiamo veduto (26) che un angolo il quale abbia il suo vertice al centro del cerchio, ha per misura l'arco compreso fra i suoi lati. Dunque, per far vedere che un angolo il quale abbia il suo vertice alla circonferenza, ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati, bisogna dimostrare che quest'arco è doppio di quello che comprenderebbero i lati dell'angolo, se avesse il suo vertice al centro. Ora, possono accadere tre casi: o uno dei lati dell'angolo proposto BAD (Fig. 54, 55, 56) passa pel centro C (Fig. 54): o il centro è situato dentro l'angolo (Fig. 55), o il centro è situato fuori dell'angolo (Fig. 56.).

I. Caso (Fig. 54). Si conduca pel centro C il diametro MN parallelo alla corda AB . L'arco AM sarà eguale all'arco BN (80); e l'angolo BAD sarà eguale all'angolo NCD (66 n.º 1). Ora, l'angolo NCD che ha il suo vertice al cen-

tro C , ha per misura l'arco ND compreso fra i suoi lati. Dunque l'angolo BAD ha la stessa misura. Ma da un'altra parte i due archi ND , AM sono eguali, poichè misurano gli angoli NCD , ACM , i quali essendo opposti al vertice nel centro C , sono per conseguenza eguali (38). Dunque $\text{arc. } ND = \text{arc. } AM = \text{arc. } BN$. Quindi la misura dell'angolo BAD è la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.

II. Caso (Fig. 55). Si conduca pel vertice A e pel centro C il diametro AO . L'angolo proposto BAD sarà diviso in due altri angoli BAO , OAD , ciascuno de' quali (pel I. caso) avrà per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati. Dunque l'angolo BAD avrà per misura la somma delle due metà degli archi BO , OD , o, ciò che torna allo stesso, la metà dell'arco totale BOD .

III. Caso (Fig. 56). Si conduca ancora pel vertice A e pel centro C il diametro AO . L'angolo BAO avrà per misura la metà dell'arco BDO , o la metà dell'arco BD più la metà dell'arco DO : e l'angolo DAO avrà per misura la metà dell'arco DO . Dunque l'angolo BAD , differenza dei due angoli BAO , DAO , avrà per misura la metà dell'arco BD , la quale è la differenza delle misure di questi due angoli.

86. COROLLARIO I. Un angolo BAD (Fig. 57) è retto, allorchè avendo il suo vertice alla circonferenza, si appoggia sopra un diametro BD . Imperciocchè ha per misura la metà della semicirconferenza BND , ossia un arco di 90° , che è la misura del angolo retto (33).

Un angolo BAD (Fig. 58) è acuto, allorchè avendo il suo vertice alla circonferenza, si appoggia sopra una corda che lascia il centro dentro lo

spazio BAD . Imperciocchè ha per misura la metà dell'arco BND , il quale è minore della semicirconferenza. Ed al contrario, l'angolo BAD (Fig. 59) è ottuso, allorchè avendo il suo vertice alla circonferenza, si appoggia sopra una corda BD che lascia il centro C fuori dello spazio BAD ; perchè allora l'arco BND è maggiore della semicirconferenza.

87. COROLLARIO II. Due angoli conseguenti valendo insieme due angoli retti (31): se il loro vertice comune è situato nella circonferenza d'un cerchio, la loro somma avrà per misura la metà di questa circonferenza. Dunque, se un angolo BAF (Fig. 60) è formato da una corda AB e da una retta AF esterna al circolo, esso avrà per misura la metà dell'arco AEB sotteso dalla corda AB , più la metà dell'arco AGD sotteso dalla corda AD , prolungamento di FA . Imperciocchè la somma dei due angoli conseguenti BAD , BAF ha per misura la metà della circonferenza. Ora, l'angolo BAD che è formato dalle due corde AB , AD ha per misura la metà dell'arco BOD compreso fra i suoi lati. Dunque l'angolo BAF ha per misura la metà della parte rimanente $BEAGD$, ossia la metà dell'arco BEA , più la metà dell'arco AGD .

88. TEOREMA III. Un angolo BAD (Fig. 61) che ha il suo vertice in un punto qualunque dentro il circolo, ha per misura la metà dell'arco BOD compreso fra i suoi lati, più la metà dell'arco bod compreso fra i prolungamenti Ab , Ad de' suoi lati.

Si conduca, dal punto b , la corda bf parallela a dD . L'angolo BAD sarà eguale all'angolo Bbf (66 n.º 1); e per conseguenza questi due

angoli avranno la stessa misura. Ora (85) l'angolo Bbf ha per misura la metà dell'arco BOF , o, ciò che torna allo stesso, la metà dell'arco BOD , più la metà dell'arco Df . E siccome gli archi Df , db sono eguali (80), per essere parallele le corde bf , dD , noi possiamo dire che l'angolo Bbf ha per misura la metà dell'arco BOD , più la metà dell'arco bod . Dunque anche l'angolo BAD ha la stessa misura.

89. TEOREMA IV. Un angolo BAD (Fig. 62) che ha il suo vertice fuori del circolo, ha per misura la metà dell'arco concavo BOD compreso fra i suoi lati, meno la metà dell'arco convesso HK compreso pure fra i suoi lati.

Guidate dal punto K la corda KQ parallela ad AB . I due angoli BAD , QKD saranno eguali, e per conseguenza avranno la medesima misura. Ora l'angolo QKD ha per misura la metà dell'arco QD , o, ciò che torna allo stesso, la metà dell'arco BOD meno la metà dell'arco BQ . E siccome $arc. BQ = arc. HK$, a motivo delle corde parallele HB , KQ ; ne segue che la misura dell'angolo QKD è la metà dell'arco BOD meno la metà dell'arco HK . Dunque l'angolo BAD ha questa stessa misura.

90. TEOREMA V. Se una retta MN (Fig. 63) incontra la circonferenza d'un circolo in due punti A e B , essa taglierà il circolo, cioè a dire, entrerà nel circolo e ne uscirà.

Si conducano dal centro C i raggi CA , CB , e la perpendicolare CE sopra AB . Le due oblique CA , CB sono eguali, come raggi del medesimo circolo, e ciascuna di esse è maggiore della perpendicolare CE (48). Tutte le linee che si potranno condurre dal punto C alle parti AE , BE ,

saranno similmente più lunghe di CE è più corte di CA o CB . Dunque 1.° La parte AB della linea proposta è situata tutta intera dentro il circolo. 2.° Se dal punto C si guida al di là di A , la retta qualunque CM , ed al di là di B , la retta qualunque CN , ciascuna di queste linee allontanandosi più che AC o CB dalla perpendicolare CE , sarà più lunga di CA o CB . Dunque le parti AM , BN della linea in questione sono situate fuori del circolo. Dunque finalmente la linea MN entra nel circolo e ne esce; dunque ella taglia il circolo.

91. COROLLARIO. Immaginemoci che la retta MN si muova parallelamente a se stessa, finchè i due punti A e B vengano a confondersi l'uno e l'altro col punto E . Allora MN tocca semplicemente il circolo in E , e CE diventa un raggio, il quale è perpendicolare alla tangente MN (a).

92. PROBLEMA III. Da un punto dato E sopra la circonferenza d'un cerchio, condurre una tangente a questa circonferenza (Fig. 64).

La soluzione di questo problema segue immediatamente dall'articolo precedente. Dal centro C al punto dato E guidate il raggio CE , alzate (45) dallo stesso punto E la perpendicolare EN al raggio CE : ella sarà la tangente ricercata.

93. PROBLEMA IV. Da un punto dato E (Fig. 65) fuori d'un cerchio, condurre una tangente alla circonferenza $ANMn$.

Congiungete il punto E ed il centro C del cerchio proposto colla retta EC : dividete (44) questa linea in due parti eguali al punto O : dal qua-

le, come centro, col raggio OE o OC , descrivete la circonferenza $EHNCn$ che seghi quella del circolo proposto, ne' punti N ed n : in seguito guidate le rette EN , En : esse toccheranno ciascuna la circonferenza $ANMn$. Imperciocchè, se voi tirate i raggi CN , Cn , vedrete che ciascuno degli angoli ENC , EnC sarà retto (86), come avente il suo vertice alla circonferenza $EHNCn$, ed appoggiandosi sopra il diametro EC ; onde ne segue che le rette EN , En sono perpendicolari alle estremità dei raggi CN , Cn , e toccano conseguentemente la circonferenza $ANMn$.

94. TEOREMA VI. Due circonferenze di cerchio che s'incontrano in due punti N ed n (Fig. 66), si tagliano.

Avendo congiunti i centri C ed O dei due cerchi X ed Y , colla retta CO , guido dal centro C del cerchio X i raggi CN , Cn , e la retta CZS che incontri in Z ed S la circonferenza del cerchio Y : guido in questo ultimo circolo i raggi OZ , ON , OS ; e suppongo che le linee OZ , CN , prolungate, se è necessario, s'incontrino in T . Adesso si ha 1.° $CO < CZ + ZO$, e $CO < CN + NO$; sottraendo dall'una e dall'altra parte i raggi eguali OK , OZ , ON , si avrà $CK < CZ$, e $CK < CN$; onde ne segue che il punto K è più vicino al centro C del cerchio X , che non lo sono i punti Z ed N . 2.° Si ha $OT < ON + NT$; sottraendo dall'una e dall'altra parte i raggi eguali OZ , ON , si avrà $ZT < NT$: ma $CZ < ZT + TC$; dunque a maggior ragione, $CZ < NT + TC$, o sia $CZ < CN$. Quindi tutti i punti Z dell'arco NKn sono più vicini che il punto N al centro C , o, ciò che torna allo stesso, sono situati dentro il cerchio X . 3.° Si

(a) Vedi la Nota alla fine del Capo.

ha OS o $ON < SV + OV$; sottraendo OV dall'una e dall'altra parte, si avrà $VN < VS$: ma $CV + VN > CN$; dunque, a maggior ragione $CV + VS > CN$, o sia $CS > CN$. Quindi tutti i punti S dell'arco NSH sono situati fuori del cerchio X . Dunque per fine il cerchio r entra nel cerchio X , e ne esce; dunque le circonferenze di questi due cerchj si tagliano ne' punti N ed n .

95. COROLLARIO I. Immaginiamoci che il cerchio X rimanendo immobile, il cerchio r se ne allontani secondo la direzione CO : egli è chiaro che i punti N ed n si avvicineranno continuamente l'uno all'altro, e che per fine veranno a confondersi l'uno e l'altro col punto K (Fig. 67). Allora i due cerchj X ed r si toccano. Laonde si vede che i centri di due cerchj, ed il loro punto di contatto, sono sempre situati sopra una medesima linea retta, e che ogni linea che passerà per due di questi punti, passerà necessariamente pel terzo.

Quindi allorchè si vorranno descrivere due cerchj X ed r che si tocchino, non si avrà che a mettere i loro raggi CK , KO l'uno appresso all'altro, sopra una stessa linea CO , ed a descrivere in seguito questi due cerchj da punti C ed O , come centri.

Se si volesse che i due cerchj si toccassero al di dentro, bisognerebbe portare il raggio minore CK sopra il maggiore KO , in modo che il punto C cadesse sul punto c , ovvero che fosse $cK = CK$.

96. COROLLARIO II. Se dal punto K s'innalza perpendicolarmente a CO , la retta AB ; questa linea toccherà ciascuno dei due cerchj X ed r (91); poichè ella sarà perpendicolare all'estremità di ciascuno dei raggi CK , OK .

La nozione che si dà della *tangente* in questo articolo, non è nè esatta per se medesima, nè molto meno adattata all'uso degli studiosi, per cui vantaggio si riproducono le presenti Istituzioni. Affinchè eglino possan precisamente comprendere il valore che ha presso i Geometri l'indicato vocabolo, rendesi indispensabile l'accennar qui due teoremi, non espressi abbastanza nel testo.

Il primo è, che i punti della linea MEN (Fig. 64),alzata perpendicolarmente all'estremità del raggio CE , stan tutti fuori del circolo, tranne il solo punto d'incontro E . Diffatti qualunque altra linea CD , condotta dal centro C alla MN , riuscirà necessariamente obliqua (49): quindi sarà essa sempre maggiore della perpendicolare CE ossia del raggio (48); e cadrà in conseguenza il punto D al di fuori della periferia.

Il secondo teorema è, che non può condursi nessuna linea retta entro l'angolo mistilineo MEF , cui formano la MN perpendicolare al raggio e l'arco attiguo FxE . Per convincersene, si osservi che qualunque linea retta GE , cadente nell'angolo CEM , debb'essere necessariamente obliqua alla CE : si supponga $CyxD$ la perpendicolare che da C può condursi alla GE , e si prenda $yF = yE$. Si scorgerà tosto che la CF deve riuscire eguale alla CE : che Cy , come perpendicolare, sarà minore di ciascuna di esse: che minori del raggio medesimo CE o CF saran pure tutte le rette condotte dal centro ad ogni punto della linea FE , posto tra F ed E (48): che conseguentemente una porzione FE della GE giace sempre entro il circolo, cioè non può mai la

stessa GE cader tutta intera nel divisato angolo mistilineo $ME \times F$ nè dividerlo in due, cominciando dal vertice E .

Suole la proposizione qui dimostrata in ultimo luogo, enunziarsi talvolta in altri termini, con dire che la MN , perpendicolare all'estremità del raggio, forma coll'arco attiguo un angolo minore di qualsiasi angolo rettilineo immaginabile: oppure che la perpendicolare anzidetta s'accosta all'arco medesimo più che nol può ogni altra retta guidata pel punto E . Entrambe queste maniere di esprimersi tornano evidentemente al senso del teorema spiegato poc'anzi; e sarebbe inutile l'applicar loro di proposito i ragionamenti già adoperati a provare la verità di esso.

Giova bensì avvertire che il genuino e generico concetto di *tangente* sta appunto nell'accennata proprietà dell'angolo di contatto $ME \times F$, vale a dire, nell'esser l'angolo medesimo essenzialmente minore di qualunque possibile angolo rettilineo. Questa condizione ha luogo, rispetto al circolo, nelle rette che partendo da un punto qualsiasi della circonferenza, si trovano perpendicolari al raggio corrispondente. Nelle altre curve, la posizione della *tangente* s'associa, come vedrassi, con altri rapporti particolari; ma, non ostante siffatta varietà, s'avvera sempre in tutte il mentovato carattere dell'angolo compreso fra la retta *tangente* e l'arco attiguo della curva.

La definizione della *tangente*, stabilita in questa nota, distingue, senz'ombra di equivoco, la *tangente* stessa dalle rette che incontrano semplicemente l'arco, e suggerisce insieme un metodo generalissimo per condurre una retta che tocchi un punto qualunque d'una curva qualsiasi. Se E , per

esempio, voglia supporre il punto dato: se ne prenderà, sulla curva proposta $E \times F$, un altro F ad arbitrio: poi, condotta per entrambi la GE , s'immaginerà che questa giri intorno ad E , finchè l'intersezione F venga a coincidere coll'intersezione E . L'istante del loro concorso determinerà la posizione ME della *tangente* cercata al punto E ; poichè rimane in tale ipotesi manifestamente esclusa la possibilità di condurre da E nessun'altra retta che cada dentro l'angolo formato dalla ME e dall'arco $E \times F$.

Non è egualmente universale il divisamento a cui si ricorre nel testo (91), e che suppone mobili a un tempo entrambi i punti di incontro A , B (Fig. 63) per farli quindi congiungere in un solo E (Fig. 64). Questa maniera di ravvisar la genesi delle *tangenti* non può con piena sicurezza adattarsi che al circolo e alle curve dello stesso ordine: trasportata alle curve degli ordini superiori, essa offrirebbe non rare volte risultati assolutamente erronei. Ma di ciò accadrà forse di trattare più opportunamente in progresso, qui basti averne posto innanzi un rapido cenno.

*Delle linee proporzionali: delle figure simili:
delle linee tagliate in ragione reciproca.*

97. **U**na linea può essere doppia o tripla d' un' altra linea: una superficie, doppia o tripla d' un' altra: un solido doppio o triplo d' un altro. Esistono adunque fra le grandezze geometriche dei rapporti e delle proporzioni, come fra le grandezze numeriche. Non dobbiamo scordarci che generalmente i due termini d' un medesimo rapporto devono essere della medesima specie; ma due rapporti altronde eguali, possono essere composti di quantità di specie differente. Quindi, per esempio, una linea può stare ad una linea, come una superficie ad una superficie o come un solido ad un solido; ma una linea non può stare ad una linea, come una linea ad una superficie, o come una superficie ad un solido.

Delle linee proporzionali in generale.

98. **TEOREMA I.** Se vi sono due linee AV , AZ (Fig. 68.) che facciano tra loro un angolo qualunque VAZ : e se avendo preso sulla prima un numero qualunque di parti eguali AB, BC, CD , DE , si conducono, sotto un angolo qualunque, le parallele BF, CG, DH, EI che incontrino la seconda nei punti F, G, H, I : tutte le parti AF, FG, GH, HI di questa seconda linea, saranno eziandio eguali fra loro.

Guidate da punti F, G, H , e parallelamente ad AV , le rette, FK, GL, HM : tutti i trian-

goli ABF, FKG, GLH, HMI saranno perfettamente eguali. Perciocchè, a motivo delle parallele BF, CG, DH, EI , tutti gli angoli AFB, AGC, AHD, AIE sono eguali (66. n.º 1) e parimente, a motivo delle parallele AV, FK, GL, HM , tutti gli angoli ZAV, ZFK, ZGL, ZHM sono eguali: di più si ha (76) $FK = BC = AB, GL = CD = AB, HM = DE = AB$; dunque tutti i triangoli proposti hanno un lato eguale adjacente a due angoli eguali, e sono per conseguenza in tutto eguali (53). Dunque $AF = FG = GH = HI$.

99. **COROLLARIO.** Se si prende un medesimo numero (per esempio due) delle parti eguali di AV e di AZ , ed un altro medesimo numero (per esempio tre) delle parti eguali di AV e di AZ : le quattro somme formeranno evidentemente una proporzione. Si ha dunque $AC : AG :: AD : AH$; o alternando $AC : AD :: AG : AH$. Medesimamente si ha $BD : BE :: FH : FI$; così di tutte le altre proporzioni di simil natura.

100. **TEOREMA II.** Se nel triangolo ABC (Fig. 69) si conduca la retta DE parallela al lato BC , e dal punto E la retta EK parallela al lato AB : i lati AB, AC, BC saranno tagliati proporzionalmente nei punti D, E, K ; cioè a dire, si avrà questa serie di rapporti eguali, $AB : AD :: AC : AE :: BC : DE$.

Reciprocamente. Se si ha la proporzione $AB : AD :: AC : AE$, la secante DE sarà parallela al lato BC . E se si ha la proporzione $AC : AE :: BC : DE$ o BK , la secante EK sarà parallela ad AB .

Immaginiamoci che la retta AB sia divisa in

un'infinità di parti eguali, e che da tutti i punti di divisione si siano condotte, parallelamente a BC o a DE , delle linee rette che terminino ad AC : queste linee divideranno (98) AC in un'infinità di parti eguali, corrispondenti ciascuna a ciascuna delle parti di AB ; di più, i punti D ed E cadranno o potranno essere riputati cadere sopra due punti di divisione di AB e di AC , poichè queste due linee sono divise ciascuna in un'infinità di parti. Medesimamente, se da tutti i punti di divisione di AC conducansi delle rette parallele ad AB , esse divideranno BC in un'infinità di parti eguali, corrispondenti alle parti delle due prime linee, ed il punto K sarà o potrà essere riputato uno dei punti di divisione di BC . Frattanto, le parti finite AD , AE , BK essendo parti corrispondenti delle tre linee AB , AC , BC , si hanno (99) queste due proporzioni $AB : AD :: AC : AE$; $AC : AE :: BC : BK$ o DE : le quali essendo poste le une di seguito alle altre, siccome aventi la medesima ragione, danno questa serie di rapporti eguali, $AB : AD :: AC : AE :: BC : DE$ (a).

Reciprocamente, se si ha $AB : AD :: AC : AE$, la secante DE sarà parallela a BC . Imperciocchè supponiamo, per un momento, che la linea, la quale partendo dal punto D sarebbe parallela a BC , venga a terminare al punto e situato sopra o sotto al punto E , si avrebbe come abbiavveduto, $AB : AD :: AC : Ae$. Ora (ip.) $AB : AD :: AC : AE$; dunque si avrebbe $AC : Ae :: AC : AE$; il che è impossibile, a meno che il punto e non si confonda col punto E , o che

(a) Vedi la Nota prima alla fine del Capo.

DE non sia parallela a BC . Si dimostrerà nella stessa maniera che dalla proporzione $AC : AE :: BC : BK$ o DE , risulta il parallelismo di EK con AB .

101. COROLLARIO I. Se si taglia un triangolo ABC (Fig. 70) parallelamente alla sua base BC , con quante si vogliano rette DE , FG , HI , i lati AB , AC saranno tagliati proporzionalmente, cioè a dire, si avrà questa serie di rapporti eguali, $AB : AC :: AD : AE :: AF : AG :: AH : AI :: DF : EG :: FH : GI :: HB : IC$. Ciò segue evidentemente dall'articolo precedente e dall'articolo 99.

102. COROLLARIO II. Le rette AB , CD (Fig. 71) essendo supposte parallele: se da un punto X si guidano le linee XC , XG , XH , XD che le incontrino, le parti di AB saranno proporzionali alle parti di CD ; cioè a dire, si avrà questa serie di rapporti eguali, $AE : CG :: EF : GH :: FB : HD$. Imperciocchè si ha primieramente $AE : CG :: XE : XG$; $XE : XG :: EF : GH$; $EF : GH :: XF : XH$; $XF : XH :: FB : HD$. Ora tutti questi rapporti sono eguali, come si vede; dunque (non prendendo che quelli di cui si ha bisogno) $AE : CG :: EF : GH :: FB : HD$.

103. COROLLARIO III. Se si divide l'angolo A d'un triangolo BAC (Fig. 72) in due parti eguali, colla retta AD : le parti BD , DC del lato opposto all'angolo A , saranno proporzionali ai lati AB , AC adjacenti a questo stesso angolo; cioè a dire, si avrà $BD : DC :: AB : AC$. Imperciocchè, se del punto B conducasi parallelamente a DA , la retta BE che incontri in E il lato CA prolungato, si avrà primieramente

$BD : DC :: EA : AC$; ma l'angolo EBA è uguale (65) al suo alterno BAD , il quale, per ipotesi, è uguale all'angolo DAC , e per questo è uguale (66 n.º 1) all'angolo BEA ; dunque i due angoli ABE , AEB sono eguali; e per conseguenza (74), il triangolo AEB è isoscele; dunque $AE = AB$. Sostituendo pertanto AB in vece di AE nella proporzione $BD : DC :: AE : AC$, essa diverrà $BD : DC :: AB : AC$.

104. PROBLEMA I. *Dividere una linea data AB (Fig. 73) in parti proporzionali ad alcuni numeri dati: per esempio, in tre parti AD , DE , EB , che siano tra loro come i numeri 2, 3, 4.*

Guido, da una delle estremità A della retta AB , una retta indefinita AZ , che faccia con AB un angolo qualunque. Avendo scelto ad arbitrio, la piccola linea mn per unità, sopra AZ prendo $AP = 2mn$, $PQ = 3mn$, $QR = 4mn$: onde ne risulta che le parti AP , PQ , QR della linea AZ sono tra loro come i numeri proposti 2, 3, 4. Dal punto R all'altra estremità B della linea data AB , guido la retta RB ; in seguito conduco, parallelamente a questa linea, le rette QE , PD . Allora si ha (101) $AP : PQ : QR :: AD : DE : EB$; ma $AP : PQ : QR :: 2 : 3 : 4$; dunque $AD : DE : EB :: 2 : 3 : 4$.

105. Osservazione. Se si dovesse dividere la retta AB in un certo numero di parti eguali, per esempio, in tre, si prenderebbero, sopra la retta AZ , colla stessa apertura arbitraria di compasso, tre parti eguali AP , PQ , QR : in seguito si condurrebbero le parallele RB , QE , PD : allora le parti AD , DE , EB sarebbero eguali.

106. PROBLEMA II. *Trovare una quarta proporzionale a tre linee date GH , IK , LM (Fig. 74).*

Con-

Conduco due linee AV , AZ che formino fra loro un angolo qualunque: sulla prima trasporto GH da A in B , ed IK da A in C : sulla seconda, trasporto LM da A in E : congiungo i punti B ed E colla retta BE : guido ad essa la parallela CF ; AF è la quarta proporzionale cercata; perciocchè si ha (100) AB o $GH : AC$ o $IK :: AE$ o $LM : AF$.

107. Osservazione. Si trova, collo stesso mezzo, una terza proporzionale a due linee date: perciocchè non si ha che a supporre che le due linee IK , LM siano eguali, e fare d'altronde la medesima costruzione: si avrà AB o $GH : AC$ o $IK :: AE$ o LM o $IK : AF$, ovvero $GH : IK : AF$. Quindi AF è la terza proporzionale domandata.

108. TEOREMA III. *Se da due punti M e P (Fig. 75) della retta MP , s'innalzino le linee MN , MR , PQ , PV , parallele a due a due e proporzionali; cioè a dire tali che MN sia parallela a PQ , MR parallela a PV , e che abbiasi la proporzione, $MN : PQ :: MR : PV$; le tre linee MP , NQ , RV , condotte per le estremità di queste parallele, andranno a concorrere in un medesimo punto S .*

Sia S il punto di concorso di MP e di NQ , e il punto di concorso di MP e di RV . Il triangolo SMN essendo segato parallelamente alla sua base MN dalla retta PQ , si ha (100) $SM : SP :: MN : PQ$; ed il triangolo SMR essendo segato parallelamente alla sua base dalla retta PV , si ha parimente $SM : SP :: MR : PV$. Ora (ip.) $MN : PQ :: MR : PV$; dunque si avrà $SM : SP :: SM : SP$: il che dà, dividendo (Alg. 127) $SM - SP : SP :: SM - SP : SP$, cioè a dire,

$PM : SP :: PM : SP$. Dunque, per essere $PM = PM$; si avrà $SP = SP$; e conseguentemente i punti S ed s si confondono.

Di qui ne segue la soluzione del Problema seguente.

109. PROBLEMA. III. *Da un punto dato M (Fig. 76) guidare una linea MP che tenda al punto di concorso di due linee AB, CD, allorchè questo punto è troppo lontano per poter esser determinato.*

Guido, pel punto M , la retta NR che incontri le linee AB , CD nei punti N ed R . Sopra NR costruisco un triangolo equilatero NSR . Da un punto qualunque Q , preso sopra AB , guido QV parallela ad NR : fo $Sq = QV$, e tiro qn parallela ad NR : dal punto S al punto M guido SM che incontri qn nel punto p : porto qp in QP sopra QV : pei punti M e P tiro la retta MP ; questa linea tenderà al punto di concorso delle due linee AB , CD . Imperciocchè si ha (100) $NR : qn :: SN : Sq$. Dunque, poichè $NR = SN$, si avrà $qn = Sq = QV$. Inoltre, si ha $NM : MR :: qp : pn$, ovvero $NM : MR :: QP : PV$. Dunque le tre linee MP , AB , CD vanno a concorrere in un medesimo punto.

Della similitudine delle figure.

110. Si chiamano *figure* o *poligoni simili*, due poligoni che hanno il medesimo numero di angoli eguali ciascuno a ciascuno, ed i lati proporzionali intorno a questi angoli eguali. Così, i due pentagoni $ABCDE$, $abcde$ (Fig. 77 e 78) saranno simili, se gli angoli A ed a , B ed b , C ed c , D ed d , E ed e sono eguali ciascuno a cia-

scuno, e se inoltre si ha questa serie di rapporti eguali $AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: EA : ea$.

Gli angoli corrispondenti A ed a , B ed b , C ed c , ec. si chiamano *angoli omologhi*; i lati AB ed ab , BC ed bc , CD ed cd , ec., che terminano ad angoli omologhi, o che formano gli angoli omologhi, si chiamano *lati omologhi*.

111. TEOREMA IV. *Due triangoli ABC, abc (Fig. 79. e 80) sono simili, quando hanno due angoli eguali ciascuno a ciascuno.*

Secondo la definizione precedente, due triangoli simili devono avere tutti gli angoli eguali ciascuno a ciascuno, ed i lati proporzionali intorno a questi angoli. Ora, i due triangoli che hanno due angoli eguali ciascuno a ciascuno, hanno tutti gli angoli eguali ciascuno a ciascuno (51). Resta dunque soltanto da dimostrarsi che questi due medesimi triangoli hanno i lati proporzionali.

Porto il lato bc sopra il suo omologo BC , da B in m : i due angoli b e B essendo eguali, ba avrà la medesima direzione di BA ; e se presa $Bn = ba$, in seguito si guidi nm , i due triangoli Bnm , bac saranno perfettamente eguali (51), come aventi un angolo eguale compreso fra lati eguali ciascuno a ciascuno. Dunque l'angolo $Bnm =$ all'angolo BAC , e l'angolo $Bmn =$ all'angolo BCA . Dunque mn è parallela a CA , e per conseguenza si ha (100) $BA : BC :: Bn : ba$: $Bm : bc :: AC : nc$.

112. COROLLARIO I. *due triangoli isosceli sono simili quando hanno solamente due angoli omologhi eguali: cioè a dire, o l'angolo del vertice eguale all'angolo del vertice, o uno degli angoli della base eguale ad uno degli angoli della*

base; perciocchè allora (75) essi hanno tutti gli angoli eguali ciascuno a ciascuno.

Tutti i triangoli equilateri sono simili, siccome equiangoli.

113. COROLLARIO II. Due triangoli ABC , abc (Fig. 81 e 82) sono simili, quando hanno i lati paralleli ciascuno a ciascuno. Imperciocchè essendo ab parallelo ad AB , se si prolunga c b sino all' incontro di AB , i due angoli abc , Apc saranno eguali (66. n.º 1): similmente le due linee pc , BC essendo parallele, i due angoli Apc , ABC sono eguali; dunque i due angoli b e B sono eguali. Medesimo ragionamento per gli altri angoli.

114. COROLLARIO III. Due triangoli sono simili, quando hanno i lati perpendicolari ciascuno a ciascuno. Imperciocchè siano i due triangoli ABC , DEF (Fig. 83) tali che DF sia perpendicolare ad AC ; ED prolungata sia perpendicolare ad AB ; ed EF sia perpendicolare a BC prolungata: questi due triangoli sono equiangoli. Diffatti 1.º I due triangoli rettangoli KMC , KOF , che hanno l'angolo comune K , e gli angoli M ed O retti, sono equiangoli; dunque l'angolo KCM o BCA = all'angolo KFO o DFE . 2.º I due triangoli rettangoli HOE , HNB , che hanno gli angoli O ed N retti, sono equiangoli; dunque l'angolo HEO o DEF = all'angolo NHB o ABC . Dunque i due triangoli DEF , ABC sono simili, poichè hanno due angoli eguali ciascuno a ciascuno.

115. Osservazione. Si osserverà, a proposito di queste sorti di triangoli, che i lati omologhi sono perpendicolari l'uno all'altro.

Osserveremo ancora che la perpendicolarità reciproca di tutti i lati dei due triangoli è necessaria, per poterne concludere che questi due triangoli sono simili. Se un triangolo avesse solamente due lati perpendicolari sopra due lati d'un altro triangolo, non si potrebbe da ciò concludere che essi sono simili.

116. TEOREMA V. Due triangoli sono simili, allorchè hanno un angolo eguale compreso fra' lati proporzionali.

Due triangoli che hanno un angolo eguale compreso fra i lati proporzionali, possono essere rappresentati dai due triangoli ABC , ADE (Fig. 84), che hanno l'angolo comune A , e nei quali si ha la proporzione, $AB:AD::AC:AE$. Ora, a motivo di questa proporzione; le basi BC , DE sono parallele (100); dunque i due triangoli ABC , ADE hanno tutti gli angoli eguali ciascuno a ciascuno, e sono per conseguenza simili.

117. TEOREMA VI. Due triangoli ABC , GHK (Fig. 84 e 85) sono simili, allorchè hanno i lati proporzionali ciascuno a ciascuno; cioè a dire, allorchè si ha $AB:GH::AC:GK::BC:HK$.

Prendo sulla AB , $AD=GH$; e, sulla AC , $AE=GK$; poi tiro DE . Poichè si ha $AB:GH::AC:GK$, si avrà eziandio $AB:AD::AC:AE$; dunque (100) DE è parallela a BC , ed il triangolo ADE è simile al triangolo ABC . Ma da un altro canto essendo DE parallela a BC , si ha (100), $AB:AD::BC:DE$; dunque, poichè (ip.) $AB:GH$ o $AD::BC:HK$, si avrà $BC:DE::BC:HK$; dunque $DE=HK$; dunque i due triangoli ADE , GHK sono perfettamente eguali (54), come aventi i tre lati eguali ciascuno a ciascuno.