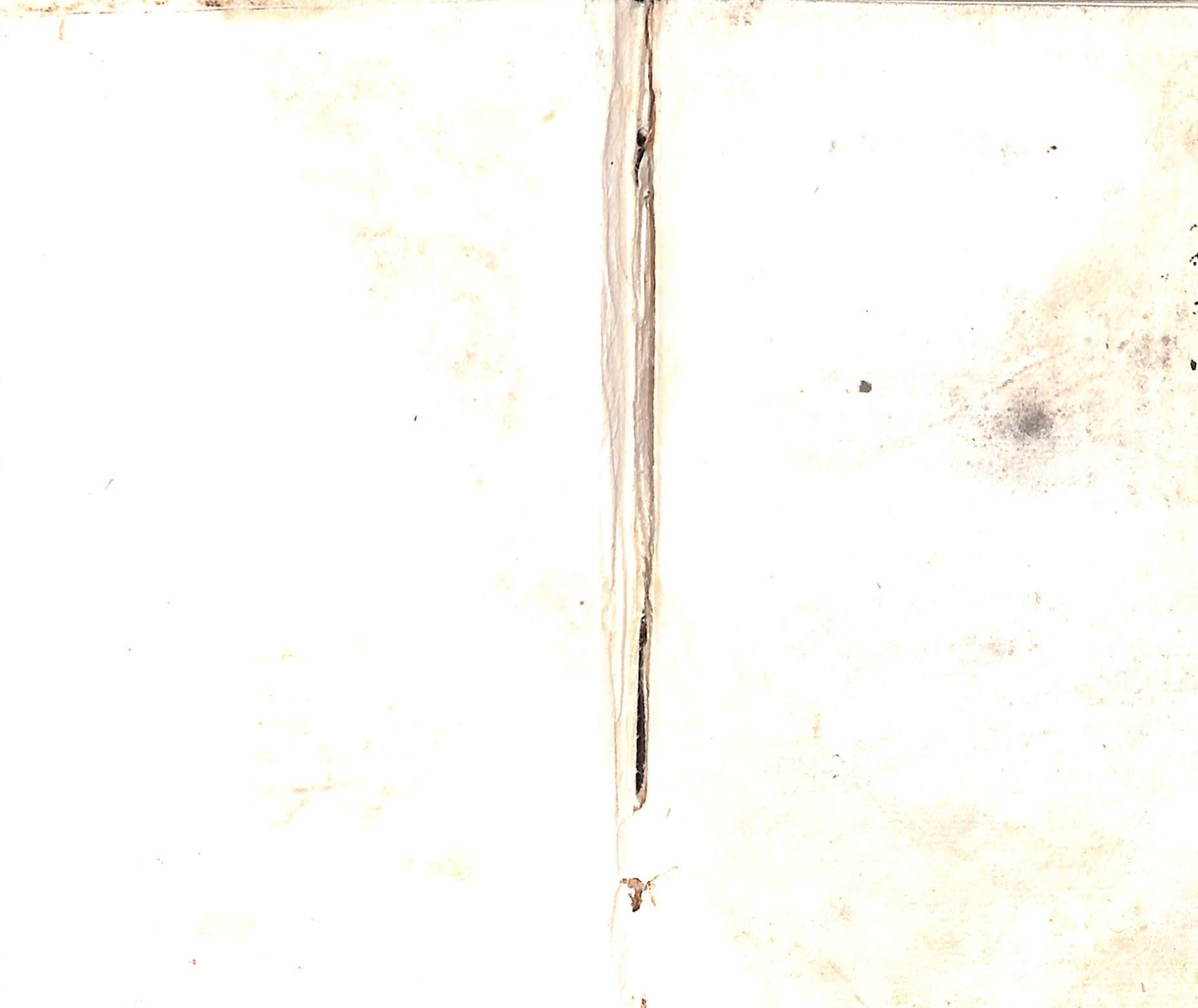




376021

# CORSO DI MATEMATICA

DEL SIGNOR

## ABATE BOSSUT

TRADOTTO DAL FRANCESE

ed arricchito di aggiunte

DAL P. ANDREA MOZZONI.

QUARTA EDIZIONE VENETA

Emendata da moltissimi errori.

*Preceduta da un nuovo Trattato Elementare*

### DI ARITMETICA

Biblioteca Provinciale  
MATERA  
e l. Spilimbergo

VOLUME PRIMO.

DONO EREDI DI

NICOLA E NICOLETTA GATTINI



*Adm. di Nicolo Gattini*

VENEZIA

PRESSO SIMONE OCCHI

M. DCCC. VIII.

GATTINI  
T  
35/1

# A V V I S O

## D E L L' E D I T O R E .

---

**I**l Corso di Matematica del SIG. ABATE BOS-  
SUT arricchito delle aggiunte ed illustrazioni del  
CH. P. MOZZONI ebbe fin' ora tale preferenza  
in confronto di altre produzioni di questo gene-  
re, che oggidì trovasi presso che consumata an-  
che la terza Veneta edizione recentemente sortita.

Credo per ciò fare cosa gràdevole agli amatori  
di questa Scienza, se a riparo di deficienza di  
opera cotanto utile, e frequentemente ricercata,  
imprendo la edizione presente, che sarà la quar-  
ta, che dall'anno 1797 si riproduce a Venezia.

Gli errori che furono lasciati correre nella pre-  
cedente edizione terza Veneta diedero ben giusti  
argomenti di lagnarsi agli studenti, e però prima  
di assoggettare la presente ai torchj, ho avuto  
sollecitudine che fosse da quelli purgata con tutta  
diligenza, conoscendo quanto essenziale cosa sia la  
precisione e la nitidezza in argomento di calcolo.

Nella presente edizione, comè pure nella pre-  
cedente si osserverà essere stata sostituita l'Arit-  
metica del MARCH. FERDINANDO LANDI  
a quella dell' Autore. Tale preferenza non è stata  
capricciosa, perciocchè quantunque l'Aritmetica  
dell' Autore sembri essere più diffusa della sosti-



tuita; pur tuttavia è agevole riconoscere che gran parte delle teorie, e dei metodi, de' quali quella è arricchita, si trovavano necessariamente ripetuti nelle altre parti dell'Opera. In questa si riscontrerà chiarezza nelle teorie, brevità nelle operazioni, metodo precisamente matematico, onde non procedere ad ulteriore insegnamento, di cui non sia preparato l'elemento nell'antecedente, e di cui non abbiasi chiara dimostrazione. Se alle accennate prerogative si aggiunga la teoria, e le operazioni che questo Autore dà nel fine della sua Aritmetica, delle misure relative a lunghezze, a spazj, a capacità, nuovamente introdotte nella Francia, e che oggidì si adoprano utilmente presso che in tutta l'Europa, è questo un pregio di più che l'adorna e la distingue, e mi ha fatto determinare a darle predilezione.

I cambiamenti che si attrovano sì nella precedente che nella presente edizione, servono assai a rischiarare, e facilitare lo sviluppo di quelle operazioni, il cui compendio le rende malagevoli alcuna volta, se non abbiano gli studenti in pronto quelle vie medie, che ad un facile scioglimento conducono. I più osservabili sono i seguenti.

1.º Nell'Appendice al Capo VII, destinata a spiegare come debbano le formole del Capo stesso trasportarsi ai numeri, onde estrarre, occorrendo, da questi le radici quadrata e cubica.

2.º In poche riflessioni che riguardano il signi-

ficato delle quantità negative, e che incontransi verso la fine del Capo VIII.

3.º In alcuni problemi relativi alle Progressioni e ai Logaritmi, che occupano parte de' Capiti IX. e X.

4.º In diverse annotazioni, talvolta assai brevi, che son sembrate o necessarie o utili alla più sicura intelligenza di parecchi luoghi del testo o meno esatti o non chiari abbastanza.

5.º Nel traslocamento degli articoli che compongono ora il Capo XII. e la successiva Appendice.

6.º Finalmente nella novella forma data a due Note, che il Cel. P. MASCHERONI appose alla seconda edizione, e da cui in questa traggono argomento l'Osservazione dell'articolo 172. e il Supplemento al Capo XIII.



## NOZIONI PRELIMINARI.

I. *Le Matematiche in generale* hanno per oggetto la misura della grandezza.

II. Si chiama *grandezza* o *quantità* qualunque essere suscettibile di aumento o di diminuzione. Tali sono i numeri, le linee, le superficie, i tempi, le velocità, i pesi ec. Ciascuna specie di grandezza ha la sua unità particolare che si sceglie ad arbitrio o che viene determinata dall'uso. Così, per esempio nelle misure geografiche, si prende ordinariamente la lega per unità, e si fa uso di essa per valutare le distanze che vi sono tra le città ed altri punti considerevoli posti sopra la superficie della Terra.

Una quantità che non ha misura fissa e determinata, si chiama quantità o grandezza indefinita.

III. Tutte le scienze matematiche si dividono in *matematiche pure*, ed in *matematiche miste*.

Le Matematiche pure considerano la grandezza in se stessa, o semplicemente come grandezza, e fatta astrazione dai corpi a cui può essere annessa, sia come sostanza, sia come modificazione: esse comprendono l'Aritmetica, l'Algebra, la Geometria, il Calcolo differenziale, ed il Calcolo integrale.

Le Matematiche miste prendono dalla Fisica, o dall'essenza della materia, qualche proprietà primitiva, da cui ricavano, coll'aiuto delle Matematiche pure, tutte le altre proprietà che si riferiscono al soggetto che trattano: questa classe comprende la Meccanica, l'Idrodinamica, l'Astronomia, l'Ottica, l'Acustica. ec.

Si danno le definizioni di tutte queste scienze, a misura che di esse si tratta.

IV. Le proposizioni che formano una parte qualunque delle Matematiche, possono essere comprese sotto i nomi

di *Assiomi*, *Teoremi*, *Problemi*, *Corollarij*, *Lemmi*, *Scolj* e semplici *Osservazioni*, senza contare le Definizioni ed altre nozioni preliminari.

V. L'*Assioma* è una proposizione evidente per se stessa, e che non ha bisogno di prova. Così le proposizioni seguenti: *il tutto è maggiore di una delle sue parti: se a grandezze uguali si aggiunga una medesima grandezza, le somme che si formeranno con queste addizioni, saranno eguali, ec.* sono assiomi.

VI. Il *Teorema* è una proposizione che si afferma, e la cui verità ha bisogno d'essere dimostrata. Così, quando dico: *La somma de' tre angoli d'un triangolo qualunque è uguale a due angoli retti*, formo un Teorema, la verità del quale vien dimostrata dalla Geometria.

VII. Il *Problema* è una proposizione nella quale trattasi di scoprire qualche verità, o di eseguire qualche operazione. Così queste proposizioni: *misurare la larghezza d'un fiume: determinare l'altezza d'una nuvola ec.* sono Problemi che la Geometria insegna a sciogliere.

VIII. Il *Corollario* è una conseguenza d'una definizione data, d'un teorema dimostrato, o d'un problema risoluto.

IX. Il *Lemma* è un teorema o un problema che non si dimostra o non si risolve, che per servire di preparazione ad un altro teorema o problema.

X. Lo *Scolio*, in tutta l'estensione del significato che gli si attribuisce, è una riflessione o una serie di riflessioni, tendente a far comprendere l'utilità d'una proposizione, e gli usi ne' quali questa proposizione può essere adoperata, ovvero a mostrare l'accordo di molte proposizioni che si epilogano, e le conseguenze che ne risultano.

XI. L'*Osservazione* è una specie di scolio, il cui oggetto si restringe ordinariamente ad indicare l'uso d'una proposizione, ed a farla ben comprendere, o a ravvicinare alcune verità, o a semplificare alcune operazioni di calcolo ec.

## AVVERTIMENTO.

*D*istingueremo con numeri le proposizioni o gli articoli d'uno stesso trattato, che richiameremo al bisogno, citandoli tra due parentesi. Così, per esempio, questa citazione (4), vuol dire che il passo dove essa si trova, è fondato sopra l'articolo 4 che convien rileggere o aver presente alla memoria. Se in un trattato si è costretto a richiamare un articolo d'un altro trattato, si scrive in abbreviatura il nome di quest'ultimo trattato innanzi al numero dell'articolo di cui si ha bisogno, e si chiude il tutto tra due parentesi. Per esempio, questa citazione (Aritm. 34) significa che la proposizione è fondata sopra l'articolo 34 dell'Aritmetica. Così delle altre.

TRATTATO  
ELEMENTARE  
DI ARITMETICA  
COMPOSTO DAL MARCHESE  
FERDINANDO LANDI.

IN TENUE LABOR.....  
Virg. Georg. IV.



3

# TRATTATO

## ELEMENTARE

# DI ARITMETICA.



*Natura dei numeri, e principj della numerazione.*

**P**er *unità* s'intende quel principio, o quell'elemento, dalla cui successiva ripetizione nasce la *pluralità*. Così quando io dico questa parola *Cassa*, intendo di nominar quel principio, che replicato più volte forma la *Città*, la quale in sostanza è una pluralità di case.

2. Questa ripetizione o moltiplicazione dell'unità potendosi, generalmente parlando, continuare senza limitazione veruna, non si può in conseguenza arrivar mai a comporre una pluralità, che sia l'ultima fra tutte le possibili, ossia in altri termini, le pluralità possibili, ed ineguali sono *infinite*.

3. Per distinguere l'una dall'altra queste ineguali pluralità fu immaginato il *numero*, cioè un *segno speciale*, che rappresenta ed esprime la pluralità. Così per indicar l'aggregato di tre unità si fissò un numero particolare, per indicar l'aggregato di quattro, di sei, di nove unità si idearono degli altri numeri corrispondenti, e così scorrendo.

4. Ma se le possibili pluralità sono infinite (2) par necessaria una infinità di caratteri a distinguerle. Or, se ciò fosse, qual mai sarebbe quel calcolator così intrepido, che non rimanesse sbigottito



4  
 alla veduta di tanti caratteri e tutti diversi? Come tutti imprimerli nella memoria? E' vero che le infinite possibili pluralità non esisteranno giammai tutte, siccome è evidentissimo: ma pure ne può esistere, e ne esiste di fatto una moltitudin grandissima, la quale può sempre crescere ad arbitrio nostro. Di qui sorge l'apparente bisogno di moltissimi caratteri tutti diversi, che servano a distinguere le moltissime coesistenti pluralità, e si presenta l'insuperabile difficoltà di conoscerli tutti, e insieme l'incomodo di aver ad inventare un nuovo carattere ad ogni nuova pluralità che si venga formando. Ma questi grandi imbarazzi sparirono mediante l'ingegnossissimo metodo di esprimere tutte le possibili pluralità colla semplice combinazione delle dieci cifre primitive.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,  
 zero, uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove

5. Ecco in che consiste questo bel metodo. Lo zero niente significa quando sia solitario, ma se venga accompagnato, verso la sinistra di chi legge, da una qualunque delle nove altre cifre; le dà un valore dieci volte più grande di quello che avrebbe la cifra stessa scritta da se. Questo è un patto. Per esempio, dopo di avere indicato colla cifra 9 la collezione di nove unità, avremo una pluralità composta di nove e una unità, ossia di dieci unità. Se vogliamo ora esprimere con un numero questa nuova pluralità, a cui non v'è ancora cifra che corrisponda: invece di inventarne a bella posta una speciale, scriviamo la cifra 1 che denota la unità semplice, e poi a destra dell'uno ponghiamo lo zero così: 10. In questa espressione l'uno, per la efficacia

5  
 convenzional dello zero, è divenuto dieci volte più grande di prima, e rappresenta appunto dieci unità semplici, il che ci eravam proposto di fare. Parimenti ad esprimere venti unità, o due decine, cioè una pluralità che nasce dall'aver preso due unità dieci volte, scriviam la cifra 2; e poi alla sua destra ponghiamo lo zero così: 20 ec.

6. Ma questa facoltà concessa allo zero di rendere dieci volte più grande qualunque cifra scritta alla sinistra di lui non si restringe ad esso zero, ma si estende ugualmente ad ognuna delle nove altre cifre, che dal rappresentare che fanno, ciascuna da se, una determinata pluralità, vengon dette cifre *significative*. Dunque ogni cifra significativa scritta a destra di un'altra, rende questa seconda dieci volte più grande. Così volendo noi esprimere la unione di ventitrè unità, cioè due unità prese dieci volte, o due decine, e tre unità, scrivo la cifra 2, e alla sua destra la cifra 3 così: 23. Medesimamente a indicar l'aggregato di trentaquattro unità, ossia tre decine, e quattro unità, scrivo la cifra 3, e a destra di lei la cifra 4 così: 34... ec. ec.

7. Si vede chiaramente che l'accennato metodo tutto consiste in attribuire alle prime cifre significative oltre il valore *fisso* ed *assoluto*, anche un valore *cangiante* e *relativo* dipendente dalla loro *posizione*. Abbiám poi detto, (4) che questo metodo serve ad esprimere tutte le possibili pluralità, ovvero compone tutti i numeri possibili col facile uso di dieci soli caratteri. Per convincerci di ciò osserviamo, (5) che la prima pluralità dopo il nove essendo il dieci: questa pluralità tosto si esprime scrivendo lo zero alla destra dell'unità, con che la unità semplice vien cambiata in unità di decina, e il dieci viene espresso con questo segno 10. Ora



se al dieci si aggiunga l'unità, avremo dieci e uno, ossia undici: se all'undici si aggiunga l'unità, avremo undici e uno, cioè dieci e due, ossia dodici: se al dodici si aggiunga l'unità, avremo dodici e uno, cioè dieci e tre, ossia tredici, e così aggiungendo sempre una unità alla pluralità precedente finchè si arrivi ad aver dieci e nove, ossia diciannove, avremo tutte le possibili pluralità dal dieci fino al diciannove inclusivamente, giacchè fra queste non può immaginarsene verun'altra (1). Ma le pluralità suddette si esprimono assai facilmente colla semplice successiva sostituzione delle prime nove cifre significative invece dello zero nella espressione 10. Così undici verrà espresso da 11: dodici da 12: tredici da 13 ... ec. (6) sino a diciannove, che si esprimerà con 19. Aggiungendo poi una unità al diciannove nascono due decine, ossia venti; pluralità, che vien dietro immediatamente al diciannove, e per denotarla non altro dee farsi che scrivere la cifra 2, e alla sua destra lo zero, e così il venti sarà espresso da 20 (5). Sostituendo in questa espressione le prime nove cifre significative analogamente a quanto abbiám fatto sopra, avrem tutti i numeri corrispondenti a tutte le pluralità che vengon dopo il 20, sino al 29 inclusivamente. Se al 29. si aggiunga l'unità si avranno tre decine, ossia trenta, e per denotare questa pluralità, che immediatamente seguita il ventinove, scrivo 30. Per simile maniera tutte si rappresenteranno le possibili pluralità sino a quella composta di nove decine e nove unità, cioè sino a novantanove, che verrà espresso da 99.

8. Abbiamo rappresentato fin qui tutte le possibili pluralità da uno sino a novantanove senza bisogno di altre cifre che delle dieci primitive. Ora

se a novantanove si aggiunga una volta l'unità, avrem dieci decine, o una decina di decine, che si chiama *centinaja*, o *cento*, e questa pluralità, per una convenzione analoga a quella che abbiám esposto nel n.º 4, si debbe esprimere naturalmente così: 100. Facendo poi delle riflessioni consimili a quelle del n.º precedente, si avranno le espressioni di tutte le pluralità da cento sino a novecento novanta nove, che verrà denotato da 999. Adesso se aggiungasi una volta l'unità a novecento novanta nove, avremo dieci centinaja, cioè una decina di centinaja, che dicesi *migliaja*, o *mille*, e che si debbe esprimere naturalmente così: 1000. Le idee sviluppate sin qui servono ad esprimere tutte le possibili pluralità dopo il mille; una più lunga enumerazione sarebbe adunque inutile, e noiosa.

9. Da quanto abbiám detto si vede, che ogni cifra diventa, per convenzione, dieci volte più grande, ovvero si mostra come replicata dieci volte, solchè occupi il secondo posto alla sinistra di chi legge: che la cifra medesima diventa cento volte più grande, se occupi il terzo posto a sinistra: mille volte più grande, se occupi il quarto posto a sinistra ec. In somma, le cifre ad ogni passo che fanno verso la sinistra, diventano dieci volte più grandi di quello che erano nell'ultimo precedente posto.

10. Ora non sarà più difficile il leggere qualunque numero si trovi scritto, o lo scrivere qualunque numero venga pronunziato, solchè si aggiunga qui la nomenclatura spettante a certi determinati complessi di unità. Egli è dunque a sapersi come ciascun numero si suppone distinto in classi di tre cifre ciascuna. La prima classe, computando da destra a sinistra, è quella delle unità, ed è formata 1.º di unità semplici, 2.º di decine, 3.º di centi-



|                       |                       |                       |                        |            |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------|
| 24,                   | 897,                  | 321,                  | 580,                   | 346,       |
| decine di milioni.    | migliaia di milioni.  | decine di milioni.    | decine di migliaia.    | unità.     |
| centinaia di milioni. | centinaia di milioni. | centinaia di milioni. | centinaia di migliaia. | decine.    |
| centinaia di milioni. | centinaia di milioni. | centinaia di milioni. | centinaia di migliaia. | centinaia. |

0.9

*Idea dell' Aritmetica: sue quattro operazioni principali.*

13. Le pluralità sono evidentemente capaci di accrescimento e di diminuzione. Infatti diasi una qualunque pluralità, se aggiungo l'unità, eccola tosto accresciuta, se la tolgo eccola diminuita. Dunque i numeri, che sono le espressioni delle pluralità, saranno essi pure suscettibili di accrescimento, e di diminuzione. Dunque soffrono i numeri due specie di operazioni, l'una che gli aumenta, l'altra che



li diminuisce. La prima chiamasi *Addizione*: la seconda *Sottrazione*. Ecco le sole operazioni *radicalmente* diverse: le altre tutte non sono altro che queste due variamente modificate. E per verità egli è chiaro che tutto quello che può farsi sulle pluralità, e quindi sui numeri, si riduce ad accrescerle o a diminuirle.

14. In questi Elementi noi parlerem solamente di quattro operazioni *principali* dell'Aritmetica, vale a dire delle due fondamentali, l'*Addizione*, e la *Sottrazione*, e di due altre che da queste immediatamente derivano, la *Moltiplicazione*, cioè, e la *Divisione*. Quanto alle rimanenti operazioni, che si possono eseguire sui numeri, e di cui alcuni rispettabili Scrittori caricano gli Elementi d'Aritmetica, crediam noi più vantaggioso di lasciarne all'Algebra la trattazione.

### *Addizione.*

15. Quando io mi propongo di fare un'*addizione*, non altro di far mi propongo, che di raccogliere insieme più numeri, e formare così un numero solo, che a quelli tutti equivaglia, numero che riceve il particolar nome di *Somma*. Non vi è in questo alcuna difficoltà se si tratti di numeri semplici, cioè di numeri aventi una sola cifra. Dati, per esempio, i due numeri semplici 6, e 4 veggio subito, che per addizionarli insieme basta che al 6 io aggiunga quattro volte l'unità, servendomi perciò anche delle dita se occorre, e così troverò che il numero 10 è la somma cercata. Se oltre i due numeri 6 e 4 ve ne fosse un terzo, per esempio, 7, e che di tutti tre si volesse la somma, aggiungerei al 10, somma di 6 e 4, sette volte l'unità,

oppure al 7 aggiungerei dieci volte l'unità, e per tal modo scoprirei che il numero 17 è la somma cercata. Questa aggiunta successiva dell'unità è veramente lenta e noiosa, ma ella si evita con un poco di esercizio, il quale insegna a vedere tutto ad un tratto qual sia la somma di un numero qualunque semplice o composto, e di un qualunque altro numero semplice. Così nel secondo esempio presto arrivo a saper dire speditamente: 6 e 4 fanno 10: e 10 e 7 fanno 17.

16. Passando ora ai numeri composti, cioè a numeri aventi più cifre, non vi è bisogno di molta riflessione a comprendere, che per trovarne la somma, basta addizionare *partitamente* le loro unità, le loro decine, le loro centinaja ec., e scrivendo in una fila particolare le cifre che risultano da queste addizioni parziali, collocare ciascuna cifra al proprio luogo (9). Per eseguir questo con ordine, opero nel modo seguente. Siano, per esempio, i numeri 6078, 9198, 483 di cui si voglia la somma. Io comincio dallo scriverli gli uni sotto degli altri, come si vede qui contro, e colloco le unità degli uni sotto le unità degli altri, e le decine sotto le decine, e le centinaja sotto le centinaja ec., di maniera che le cifre dei posti corrispondenti formino come altrettante colonne verticali. Fatto questo, tiro sotto di essi numeri una linea, e cominciando a raccogliere le unità dico: 3 e 8 fanno 11. 11 e 8 fanno 19, cioè una decina e nove unità, scrivo dunque la cifra 9 delle unità sotto la linea nella rispettiva colonna, e ritengo la decina da aggiungere alla colonna vicina: indi passando alle decine dico: 1 di ritenuta e 8 fanno 9: 9 e 9 fanno 18: 18 e 7 fanno 25, cioè cinque decine e due centi-



naja, scrivo la cifra 5 delle decine nella corrispondente colonna, e ritengo le due centinaja da aggiungere alla colonna prossima: poi venendo alle centinaja dico: 2 di ritenute e 4 fanno 6: 6 e 1 fanno 7: 7 e 0 fanno 7; cioè sette centinaja: scrivo la cifra 7 delle centinaja nella propria colonna, e finalmente addizionando i mille dico: 9 e 6 fanno 15; cioè cinquemille e un diecimille, scrivo la cifra 5 del mille nella sua colonna, e pongo alla sinistra del 5 la cifra 1 del diecimille, terminando così la operazione: giacchè non vi sono altre colonne da addizionare. Per conseguenza la somma cercata è 15759.

17. La pratica dunque dell'addizione è compresa nella seguente regola. 1.° Si scrivano gli uni sotto degli altri i dati numeri, e le unità degli uni sieno esattamente sotto le unità degli altri, e le decine sotto le decine, e le centinaja sotto le centinaja ec.; sicchè le cifre dei posti corrispondenti formino come altrettante colonne verticali. 2.° Si tiri una linea sotto a questi numeri, e poi si addizionino insieme prima le loro unità, in seguito le loro decine, indi le loro centinaja ec. scrivendo sotto la linea, e nelle rispettive colonne le somme risultanti da queste addizioni parziali. 3.° Se la somma di qualche colonna superi 9 si scriva la sola ultima cifra (per ultima cifra intenderem sempre quella che è la più vicina alla destra di chi legge), e le altre si ritengano per aggiungerle alla colonna prossima a sinistra.

18. Ecco ora alquanti esempj in alcuni de' quali si è posto solamente il risultato sopprimendo la spiegazione del calcolo, e negli altri si è ommesso anche il risultato, onde lasciar campo agli studiosi di esercitarsi, e così rendersi franchi nella pratica dell'addizione, che è di tanto uso nella vita civile.

|       |        |       |          |
|-------|--------|-------|----------|
| 5783  | 58246  | 77756 | 10376786 |
| 4328  | 39438  | 3388  | 789632   |
| 5987  | 17321  | 9763  | 5589     |
| 8521  | 98997  | 90257 | 73       |
| <hr/> | <hr/>  | <hr/> | <hr/>    |
| 24619 | 214002 |       |          |
| <hr/> | <hr/>  | <hr/> | <hr/>    |

19. Accade non di rado, che si commettano degli errori nella pratica dell'addizione. E' dunque bene di verificarne il risultato. Per questo si rifaccia la operazione incominciando dall'alto delle colonne, e venendo al basso. Se il primo risultato è giusto; egli deve la seconda volta manifestamente tornar lo stesso. Ma bisogna distruggere, quanto si può, le cagioni degli sbagli. Queste sono: 1.° la fretta: 2.° le cifre mal formate, o mal separate: 3.° le colonne confusamente costrutte: 4.° la dimenticanza di aggiungere nelle rispettive colonne le cifre ritenute dalle altre colonne vicine. Importa dunque 1.° l'operare adagio: 2.° il formare nitidamente, e ben separare le cifre: 3.° il collocar queste cifre esattamente nelle corrispondenti loro colonne: 4.° lo aggiunger sempre alla colonna che attualmente addizionasi quanto si ritenne dalla vicina; e per non dimenticarsene s'incominci sempre dal numero ritenuto nel prender la somma.

#### Sottrazione.

10. Questa voce *sottrarre* significa lo stesso che *togliere*. Colla *Sottrazione* adunque si toglie un numero da un altro, se il secondo sia maggiore o almeno uguale al primo. Dunque la *Sottrazione* consiste in togliere un numero da un altro numero.



maggiore, o uguale. Il numero da cui si sottrae rimane, dopo l'operazione, necessariamente diminuito, dunque il chiamerem *minuendo*: il numero che si sottrae quello è che produce la diminuzione; dunque il direm *minutore*: il numero che risulta dall'operazione è quella parte che rimane al minuendo dopo che se ne è tolto il minutore, dunque questo numero noi chiameremo *residuo*. Il residuo poi chiamasi anche *differenza*, mentre esprime appunto la quantità per cui il minuendo *differisce* dal minutore, ossia supera il minutore. Noi useremo di questi due nomi indistintamente.

21. E' assai facile il praticare la sottrazione fra due numeri semplici. S'io voglio, a cagione di esempio, sottrarre 4 da 7, basta ch'io tolga dal 7 la unità quattro volte successivamente; avrò 3 di residuo. Anche qui (15) un poco di esercizio dispensa dal sottrarre lentamente una unità per volta dal minuendo. Presto si arriva a trovare di un solo colpo la differenza che passa tra due numeri semplici qualunque, e saper dire subito, per esempio, chi da 7 leva 4 resta 3. Facilissima è anche la sottrazione di un numero semplice da un numero qualunque composto. Così, presto imparo a dire: chi da 15 leva 5 resta 10: chi da 19 leva 8 resta 11 ec.

22. Si tratti ora di eseguire la sottrazione sui numeri composti. Veggio speditamente, che se troverò la differenza, che passa fra le unità del minuendo, e le unità del minutore: le decine del minuendo, e le decine del minutore: le centinaja del minuendo, e le centinaja del minutore ec.; l'aggregato di queste differenze *parziali* costituirà evidentemente la differenza *totale*. Siano per esempio, i due numeri 4731, 2421 di cui si cerchi la dif-

ferenza. Per trovarla con ordine opero come segue: scrivo il minutore sotto del minuendo, e pongo le unità del primo sotto le unità del secondo: le decine sotto le decine: le centinaja sotto le centinaja ec., sicchè le cifre dei posti corrispondenti formino come altrettante colonne verticali, come si vede qui contro. Tiro poscia sotto di que-  
 4731  
 2421  
 —  
 2310  
 ta dico: chi da 1 leva 1 resta 0, scrivo 0 —  
 sotto la linea nella sua colonna, poi vado alle 2310  
 decine, e dico: chi da 3 leva 2 resta 1, scri-  
 vo 1 nella propria colonna, indi passo alle centi-  
 naja, e dico: chi da 7 leva 4 resta 3, scrivo 3  
 nella rispettiva colonna, poscia seguito innanzi alle  
 migliaia, e dico: chi da 4 leva 2 resta 2, scri-  
 vo 2 nella colonna corrispondente, e così ho fini-  
 to la operazione, e la cercata differenza è 2310.  
 Ecco un altro esempio.

23. Siano i due numeri 5843, 2752. Per averne la differenza io li dispongo come nell'esempio precedente, e incominciando dalle unità dico: chi da 3 leva 2 resta 1, scrivo 1 nella sua co- 5843  
 lonna, indi passando alle decine mi accorgo 2752  
 che la cifra 5 del minutore è grande troppo —  
 per essere sottratta dalla cifra 4 del minuendo. 3091  
 Qui bisogna trovare un ripiego, altrimenti non  
 posso andare innanzi nell'operazione, la quale per  
 se stessa è fattibile, giacchè il minuendo supera il  
 minutore. Considero che la cifra 8 esprime le  
 centinaja del minuendo, potrebbe ella prestar qual-  
 che cosa alla troppo piccola cifra 4, onde ingran-  
 dirla, e renderla così capace di soffrire la sottra-  
 zione della corrispondente cifra 5. Prendo adunque  
 dalla cifra 8 una unità, che trasportata nel posto  
 della cifra 4 diventa una decina, e così invece di 4



ho 14, da cui togliendo 5 resta 9, che scrivo al residuo nella colonna delle decine. Passo di poi alle centinaja, e ricordandomi che la cifra 8 ha ceduto una delle sue unità alla cifra vicina 4, ed è perciò divenuta 7, dico: chi da 7 leva 7 resta 0, oppure, se non voglio considerare diminuita di una unità la cifra 8 del minuendo, considero in cambio accresciuta di una unità la corrispondente cifra 7 del minutore, il che, quanto al risultato, è manifestamente lo stesso, e dico: chi da 8 leva 8 resta 0, scrivo 0 nella rispettiva colonna, e finalmente vado alle migliaia, e dico: chi da 5 leva 2 resta 3, scrivo 3 nella propria colonna, e trovo, che 3091 è la differenza cercata. Ecco un terzo esempio.

24. Diansi i numeri 70005, 42366. Si tratta di trovarne il residuo. Scrivo al solito il minutore 42366. sotto del minuendo 70005, come si vede qui contro, e incominciando dalle unità, 999 vedo che non è possibile levar 6 da 5, il 70005 che si enunzia praticamente dicendo: chi da 42366 5, leva 6, non si può, dunque ricorro alla cifra vicina al 5 per aver qualche cosa onde 27639 ingrandir questo 5, ma la cifra vicina è uno zero, e nulla può darmi, lo stesso accade colla terza, e colla quarta cifra, che, essendo zeri, non servono al bisogno. Ricorro pertanto alla quinta cifra significativa 7, e prendo da lei in prestanza una unità. Questa è unità di dieci migliaia, e però composta di nove migliaia e dieci centinaja, ossia nove migliaia, nove centinaja, e un centinajo, ossia nove migliaia, nove centinaja, nove decine e una decina, dunque 10000 è uguale a 9990 e più 10. Ora s'io ritengo 10 da aggiugnere alla cifra 5 delle unità del minuendo, l'ho ingrandita quanto basta perchè possa ella soffrire la sottrazione del-

della corrispondente cifra 6 del minutore; e poscia collocando mentalmente nel minuendo ai rispettivi loro luoghi le altre parti del numero imprestato, vengo a cambiare gli zeri di esso minuendo in altrettanti 9. Dopo ciò la operazione non ha più difficoltà, e trovo che il residuo cercato è 27639. Si suole in pratica, invece di cambiar gli zeri del minuendo in altrettanti 9, cambiarli invece in altrettanti 10, e aumentare di una unità le corrispondenti cifre del minutore, il che punto non altera il risultato, siccome è chiaro.

25. La pratica della sottrazione è contenuta nella seguente regola. 1.<sup>o</sup> Si scriva il minutore sotto del minuendo, di modo che le cifre dei posti corrispondenti stieno esattamente le une sotto le altre, e formino come altrettante colonne verticali; indi sotto questi numeri così scritti tirisi una linea. 2.<sup>o</sup> Si tolgano le unità del minutore dalle unità del minuendo, poi le decine del primo dalle decine del secondo, in seguito le centinaja dalle centinaja ec., e ad ogni particolar sottrazione si scrivano i residui parziali sotto la linea nelle rispettive loro colonne. L'aggregato di questi residui parziali darà evidentemente il residuo totale cercato. 3.<sup>o</sup> Se una qualche cifra del minutore superi la corrispondente cifra del minuendo, si aumenti questa di una decina, e si aumenti di una unità la cifra vicina del minutore, alla quale immediatamente dopo si passa operando. Ecco alquante sottrazioni da eseguire per esercizio.

|      |      |      |      |        |
|------|------|------|------|--------|
| 6000 | 1798 | 6532 | 5002 | 150001 |
| 4000 | 1653 | 5421 | 4573 | 76385  |
| 2000 | 145  |      |      |        |



26. Il residuo è l'*eccesso* del minuendo sul minutore (20). Dunque, se questo residuo si aggiunga al minutore, dee tornare il minuendo. E però la prova della sottrazione consiste nell'addizionare insieme il residuo, e il minutore. Se questa addizione restituisce il minuendo è segno infallibile che si operò con giustezza, diversamente è certo che si sbagliò.

### Moltiplicazione.

27. **L**a parola *moltiplicare* significa *ripetere*, *replicare*. Dunque la moltiplicazione consiste in replicare, o prendere un numero più volte. Si vede perciò, che in ogni moltiplicazione proposta ad eseguirsi si distinguon necessariamente due numeri: 1.<sup>o</sup> il numero che deve moltiplicarsi, e questo si chiama *moltiplicando*: 2.<sup>o</sup> il numero che esprime quante volte il moltiplicando si deve ripetere, e questo dicesi *moltiplicatore*. Si voglia, per esempio, ripetere il 18 per 5 volte, ossia moltiplicare 18 per 5: 18 è il moltiplicando, 5 è il moltiplicatore, e amendue si chiamano con mutuo nome *radici*, o più sovente *fattori*. Quel numero poi, che risulta dalla moltiplicazione già eseguita si dice *prodotto*.

28. Talvolta la unità è dessa il moltiplicatore, ma non vi è allora moltiplicazione reale. E certamente in tal caso il moltiplicando non soffre alterazione, giacchè niente vien replicato. Ma se il moltiplicatore superi la unità, allora ci è vera moltiplicazione, la quale altro non è in sostanza che una *addizione iterata*. Infatti che altro importa replicare un dato numero più volte (n.<sup>o</sup> preced.) se non addizionarlo con se medesimo? Se dunque la moltiplicazione è semplicemente una addizione

iterata, essa immediatamente deriva dall'addizione, (14) anzi è una cosa stessa, in quanto alla intima sua natura, coll'addizione; dunque la moltiplicazione non è operazione *necessaria*. Ciò nondimeno, se il moltiplicando e il moltiplicatore sieno composti di molte cifre, si vede che il cercarne il risultato per mezzo della comune addizione costerebbe assai di tempo, e di fatica. Sarebbe adunque desiderabile di ritrovare un metodo che *compendiosamente* guidasse al medesimo fine. Ora questo metodo compendioso consiste appunto in quella particolare operazione dell'Aritmetica, che dicesi *moltiplicazione*. Egli è dunque molto utile di conoscerla; entriam pertanto a spiegarla.

29. Se si tratti di moltiplicare un numero semplice per un altro numero semplice, questo non può eseguirsi se non per via della comune addizione. Si voglia, ad esempio, moltiplicare 4 per 3: bisogna addizionare il 4 a se stesso due volte successivamente, scrivendolo perciò tre volte 4 come si vede qui contro, e prendendone la somma: questa somma è 12; dunque 12 è il prodotto di 4 moltiplicato per 3. Sia il numero 8 — da moltiplicarsi per 7. Addiziono l'8 a se stesso sei volte successivamente, ed ho 56 per somma, dunque 56 è il prodotto di 8 moltiplicato per 7. ec. ec.

30. Moltiplicare adunque due numeri semplici l'uno per l'altro non differisce neppure *quanto alla pratica* dallo addizionarli. Non è per altro difficile d'imparare a memoria i prodotti dei numeri semplici presi a due a due in tutti i modi possibili, trovati che sieno una volta questi prodotti per mezzo dell'addizione. Ma, trattandosi di numeri composti, la moltiplicazione è *in pratica* una cosa di-



versa dall'addizione. Si debba, per esempio, moltiplicare 4532 per 9, invece di addizionare il 4532 con se medesimo otto volte successivamente, osservo, che se io ripeterò nove volte le 2 unità, le 3 decine, le 5 centinaja, e le 4 migliaia del proposto numero, avrò ripetuto nove volte tutto il numero 4532, ossia lo avrò moltiplicato per 9. Scrivo dunque il moltiplicator 9 sotto al moltiplicando 4532, e colloco le unità del primo sotto le unità del secondo, come si vede qui contro: poi, 4532 dopo di aver tirata sotto di essi una linea, ———— comincio dalle unità del moltiplicando, e dico: 2 moltiplicato per 9, ossia 9 volte 2 dà 18 (n.º preced.). Ho dunque 18 unità, vale a dire, 1 decina e 8 unità, scrivo la cifra 8 sotto la linea nella colonna delle unità, e ritengo la decina da aggiungere alla prossima colonna delle decine, alle quali passando dico: 9 volte 3 dà 27 decine, cioè 2 centinaja, e 7 decine, dovrei dunque scriver 7 nella colonna delle decine: ma siccome ho ritenuto una decina dal precedente prodotto, così l'aggiungo alle 7 decine ottenute adesso, e perciò scrivo 8 nella colonna delle decine, e ritengo le 2 centinaja da aggiungere alla colonna vicina delle centinaja, alle quali passando dico: 9 volte 5 dà 45 centinaja, cioè 4 migliaia, e 5 centinaja; a queste 5 centinaja unendo le 2 centinaja ritenute ho 7, che scrivo nella colonna delle centinaja, e ritengo le 4 migliaia da aggiungere alla colonna delle migliaia, a cui procedo dicendo: 9 volte 4 dà 36 migliaia, ossia 3 decine di migliaia, e 6 migliaia; a queste 6 migliaia congiungo le 4 migliaia ultimamente ritenute, ed ho così 10 migliaia, ossia una decina di migliaia; dunque il presente prodotto è composto di 4 decine di migliaia,

dunque scrivo 0 nel posto delle migliaia, (perchè non vi sono unità di migliaia) e a sinistra dello 0 scrivo 4 a dirittura, perchè non esistono qui altre cifre da moltiplicarsi. In questo modo io trovo che 40788 è il prodotto di 4532 moltiplicato per 9.

31. Nel caso precedente il moltiplicando era un numero composto, e il moltiplicatore un numero semplice. Siano ora amendue numeri composti. Prendo, a cagion di esempio, 3427 per moltiplicando, e 624 per moltiplicatore. Scrivo il moltiplicatore sotto al moltiplicando, e colloco le unità dell'uno sotto le unità dell'altro, le decine sotto le decine ec., come si vede qui contro, poi ragiono così. Moltiplicare un numero per un altro, vuol dire ripetere il primo tante volte quante sono le unità del secondo, dunque nel proposto

|         |                            |
|---------|----------------------------|
| 3427    | Moltiplicando.             |
| 624     | Moltiplicatore.            |
| ———     |                            |
| 13708   | Primo Prodotto Parziale.   |
| 6854    | Secondo Prodotto Parziale. |
| 20562   | Terzo Prodotto Parziale.   |
| ———     |                            |
| 2138448 | Prodotto totale.           |

esempio dovrò ripetere il 3427 per 624 volte, ma 624 è composto di 4 unità e 20 unità e 600 unità; dunque debbo ripetere il 3427 per 4 volte, e 20 volte, e 600 volte. Comincio dal ripeterlo 4 volte, nel che la operazione è affatto uguale a quella del num.º precedente, e trovo 13708 per primo prodotto parziale. Andando ora alle decine del moltiplicatore veggio ch'io debbo moltiplicare 3427 per 20: s'io dovessi moltiplicare solamente per 2, troverei, operando come sopra (n.º preced.) troverei, dico, 6854 per prodotto; ma siccome ho a moltiplicare non per 2, ma per 20 che è un numero 10 volte maggiore di 2, è chiaro che il



prodotto cercato deve essere 10 volte maggiore di 6854, vale a dire, che le unità semplici di quest'ultimo numero devono diventare decine, le decine devono diventar centinaja ec. Ora ciò si ottiene scrivendo 6854, di maniera che la cifra 4 sia nella colonna delle decine, la cifra 5 sia nella colonna delle centinaja ec., come si vede nell'esempio: questo prodotto disposto così sarà il *secondo prodotto parziale*; le cui cifre vanno scritte ai loro luoghi nel tempo stesso che si trovano operando. Dopo di avere moltiplicato 3427 per 4 e per 20, mi resta ancora a moltiplicarlo per 600: moltiplico prima per 6, e trovo, che il prodotto è 20562; ma il vero moltiplicatore non è 6, ma 100 volte maggior di 6; dunque anche il prodotto deve essere 100 volte maggiore di 20562; colloco adunque le sue cifre, nell'atto stesso che le trovo operando, le colloco, dissi, come si vede nell'esempio per modo, che la cifra delle unità sia nella colonna delle centinaja, la cifra delle decine nella colonna delle migliaia, ec. Questo prodotto scritto così sarà il *terzo prodotto parziale*. Il moltiplicatore non ha più cifre; dunque non possono più aversi altri prodotti parziali. Resta ora che si addizionino i prodotti parziali trovati onde avere il *prodotto totale*. Effettuo questa addizione, e trovo così, che 2138448 è il prodotto totale cercato. Ecco un altro esempio.

32. Si debba moltiplicare 45728 per 5400. Consta dai principj della numerazione, che 5400 è lo stesso che 54 centuplicato, ossia 54 moltiplicato per 100. Dunque s'io moltiplicherò il proposto numero 45728 per 54, moltiplicherò per un numero 100 volte minore del dato, e perciò mi verrà un prodotto 100 volte minore del vero (n.º pre-

ced.). Dunque converrà rendere questo prodotto 100 volte maggiore, e questo si fa scrivendo due zeri alla sua destra, con che le sue unità diventano centinaja, le sue decine divengono decine di centinaja ec. Scrivo dunque il *moltiplicatore ridotto* 54 sotto al moltiplicando 45728, come si vede qui contro, e operando nella maniera indicata (n.º prec.), trovo 2469312 per il prodotto di 45728 moltiplicato per 54; — ma si è veduto, che questo prodotto è 100 volte minore del vero; dunque aggiungendo due zeri alla sua destra, si avrà 246931200 per il cercato prodotto. Egli è visibile, che operando di questo modo, il calcolo si accorcia. Questo accorciamento poi è praticabile in tutti i casi analoghi, mentre facendo uso di un consimile raziocinio si proverà, che trattandosi di moltiplicare un numero per un altro terminato alla destra di chi legge da uno o più zeri, si possono trascurar questi zeri, e moltiplicare per le rimanenti cifre del moltiplicatore, collocando in seguito alla destra del prodotto tanti zeri, quanti ne furono dappprincipio trascurati.

33. Supponghiam di presente, che si debba moltiplicare 365000 per 2300. Si trascurino gli zeri, che terminano amendue i fattori, e per tal modo si dovrà moltiplicare 365 per 23, il prodotto sarà 8395, alla cui destra scrivendo cinque zeri tanti, cioè, quanti da prima ne furono trascurati, si avrà 839500000 per il richiesto prodotto. Si può utilmente impiegare questo metodo in tutti i casi di simile natura. La dimostrazione si deduce con facilità dalle riflessioni esposte al n.º precedente.

24. Dalle cose dette fin qui riguardo alla mol-



tiplicazione, risulta per essa la seguente regola 1.<sup>o</sup>. Si scriva il moltiplicatore sotto al moltiplicando, e girata sotto ad amendue una linea, si moltiplichi ciascuna cifra del moltiplicando, cominciando dalle sue unità, poi passando alle decine, e così di seguito, per le unità del moltiplicatore: si avrà il primo prodotto parziale, le di cui cifre si scriveranno sotto la linea ne' rispettivi lor posti. 2.<sup>o</sup> Si moltiplichi parimente ciascuna cifra del moltiplicando, sempre incominciando dalle sue unità, per le decine del moltiplicatore, indi per le centinaja, in seguito per le migliaia ec. dello stesso moltiplicatore, finchè sieno esaurite tutte le sue cifre, scrivendo gli uni sotto degli altri i prodotti parziali che successivamente si otterranno, e collocando l'ultima cifra di ogni prodotto (per ultima cifra s'intende la più vicina alla destra di chi scrive) sotto quella cifra del moltiplicatore per cui attualmente si moltiplica. 3.<sup>o</sup> Se il prodotto di una cifra per un'altra abbia due cifre (dico due cifre, e non più cifre, perchè il prodotto di una cifra per un'altra non può mai contenere più di due cifre, come vedrem tra poco) scrivasi solamente l'ultima; e si ritenga la prima, onde aggiungerla al prodotto della cifra del moltiplicando, che siegue immediatamente a sinistra. 4.<sup>o</sup> Si addizionino tutti i prodotti parziali, onde avere il prodotto totale. 5.<sup>o</sup> Se uno de' fattori o tutti due abbiano in fine degli zeri, questi si trascurino, e fatta la moltiplicazione delle rimanenti cifre, si pongono in fine del prodotto totale così trovato altrettanti zeri, quanti dapprincipio ne furono trascurati.

35. Non dovrei aver bisogno di far osservare, che ad eseguire speditamente la moltiplicazione è di mestieri, dati due numeri semplici, rilevarne tosto il prodotto, senza aver bisogno di cercarlo

ogni volta lentamente per mezzo dell'addizione (29). Questa è per altro tenue difficoltà, mentre una mediocre attenzione è sufficiente a ritenere nella memoria i prodotti di due numeri semplici qualunque, trovati che sieno una sola volta, e l'esercizio poi, quel gran maestro in tutte le discipline, rende questi prodotti così familiari, che il calcolatore li trova prontissimi all'uopo suo. Oltracciò si possono facilmente aver sempre sotto degli occhi tutti i prodotti dei numeri semplici presi due per due, e ordinatamente disporli, onde saper trovarli quando ci occorre di usarne. Per giungere ad un tal fine io ragiono così. Si otterranno i prodotti de' numeri semplici presi due per due, se ciascuno di questi numeri venga moltiplicato partitamente per tutte le prime cifre significative incominciando da 1, e andando sino a 9 inclusivamente. Ora questo può eseguirsi nel modo seguente. Scriviamo i nove numeri semplici tutti in fila così;

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

Fatto questo, addizioniamo una volta a se stesso ciascun numero di questa fila, avremo con ciò evidentemente moltiplicato per 2 i nove numeri semplici, e otterremo una seconda fila composta de' seguenti numeri.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Im seguito addizioniamo i numeri semplici ai loro prodotti per 2, le somme risultanti esprimeranno manifestamente i prodotti di tutti i numeri semplici moltiplicati per 3. Ma i numeri semplici sono quelli, che compongono la prima fila, i loro prodotti per 2 son quelli, che compongono la se-



conda fila; bisogna dunque addizionare insieme i numeri della prima fila con i corrispondenti numeri della seconda, si avrà così la seguente terza fila composta de' prodotti di tutti i numeri semplici moltiplicati per 3.

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

Quindi addizioniamo i numeri semplici contenuti nella prima fila con i loro prodotti per 3 contenuti nella terza fila, avremo la seguente quarta fila, che conterrà i prodotti de' numeri semplici moltiplicati per 4.

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36.

Per poco che uno sappia riflettere, vedrà facilmente, che la cosa si riduce ad addizionar sempre la prima fila con la ultima trovata, onde avere la fila susseguente. Scritta dunque la prima fila de' numeri semplici, e ripetuta otto volte questa addizione, si avranno nove file di numeri contenenti manifestamente i prodotti di tutti i numeri semplici moltiplicati ciascuno per 1, 2, 3, ec. fino a 9 inclusivamente, e contenente perciò i prodotti di tutti i numeri semplici presi due per due. Scrivendo ora tutte le succennate file le une sotto le altre, di maniera che le somme risultanti da ciascuna addizione parziale, formino altrettante file verticali, si formerà la seguente tavola attribuita a Pitagora.

| 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2 | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

36. Dal modo col quale abbiamo costruito questa tavola ricaviamo il modo di usarne. Si voglia, ad esempio, il prodotto di 7 moltiplicato per 5. Egli è chiaro che un tal prodotto dee trovarsi nella quinta fila orizzontale, ( incominciando dall'alto a numerar le file, e venendo al basso ) giacchè questa quinta fila contiene i prodotti di tutti i numeri semplici moltiplicati per 5; ma lo stesso prodotto deve ugualmente trovarsi nella settima fila verticale ( incominciando dalla sinistra di chi legge a numerare le file, e andando verso la destra ), mentre questa fila comprende i prodotti di 7 moltiplicato per tutti i numeri semplici. Dunque il cer-



cato prodotto di 7 moltiplicato per 5 esser non può che 35, mentre egli solo trovasi al tempo stesso e nella quinta fila orizzontale, e nella settima verticale. Con raziocinj affatto analoghi si stabilisce il seguente canone generale per conoscere spedatamente il prodotto di due numeri semplici qualunque, mediante la tavola di Pitagora. Si cerchi (incominciando dall'alto, e venendo al basso) *quella fila orizzontale, che corrisponde al numero delle unità del moltiplicatore; quindi si cerchi (incominciando a sinistra, e andando verso la destra) quella fila verticale, che corrisponde al numero delle unità del moltiplicando; s' incontrerà necessariamente la casella, che trovasi a un tempo in entrambe le file; in questa casella sta scritto il richiesto prodotto*: Ecco un altro esempio.

37. Si voglia il prodotto di 5 moltiplicato per 7. Cerco, a tenor della regola (n.º preced.) la settima fila orizzontale, e la quinta verticale, e m' imbatto subitamente nella casella comune ad ambedue le file, nella quale casella trovo scritto 35; dunque 35 è il prodotto di 5 moltiplicato per 7. Ma il prodotto di 7 moltiplicato per 5 è ugualmente 35; dunque 5 moltiplicato per 7 è lo stesso di 7 moltiplicato per 5. Prendasi ora ad arbitrio due numeri semplici, e si moltiplichino insieme due volte, invertendo la seconda volta l'ordine de' fattori, la tavola di Pitagora mostrerà in entrambi i casi lo stesso prodotto: così 3 moltiplicato per 6 si troverà uguale a 6 moltiplicato per 3: 8 moltiplicato per 9 si troverà uguale a 9 moltiplicato per 8 ec. ec.

38. Ma questa inversione è generalmente praticabile in tutti i numeri e semplici e composti. Eccone una chiarissima dimostrazione. Supponiamo

che si voglia moltiplicare 5 per 3. Se scrivasi cinque volte di seguito la unità in una medesima fila orizzontale, e si formino tre di queste file, come si vede qui sotto:

I, I, I, I, I,

I, I, I, I, I,

I, I, I, I, I,

egli è di palpabile evidenza che la collezione di tutte queste unità sarà uguale a 5 ripetuto tre volte, ossia a 5 moltiplicato per 3. Ma le tre file orizzontali sopranotate composte ciascuna di cinque unità formano, e formar debbono evidentemente cinque file verticali di tre unità ciascuna. Dunque, prendendo la cosa sotto questo nuovo aspetto, si vede, che la collezione di tutte le soprascritte unità è uguale a 3 ripetuto cinque volte, ossia a 3 moltiplicato per 5. Dunque 3 moltiplicato per 5 è uguale a 5 moltiplicato per 3. La medesima dimostrazione vale in tutti i casi possibili. Per esempio, quattro file orizzontali composte ciascuna di 12 unità formeranno dodici file verticali composte ciascuna di 4 unità, e per conseguenza 12 moltiplicato per 4 è uguale a 4 moltiplicato per 12. Possiam dunque stabilire sicuramente questo generale principio. *Dati due numeri da moltiplicarsi l'uno per l'altro, il prodotto rimarrà sempre lo stesso, qualunque sia l'ordine secondo cui vengono essi moltiplicati (a).*

(a) Intendiam sempre qui di parlare di numeri puramente astratti, vale a dire prescindendo del tutto da qualunque particolar specie di unità. Se si trattasse di numeri concreti, cioè se si contemplasse la particolare natura delle loro unità, e questa natura fosse diversa ne' due fattori, la inversione accennata non potrebbe più aver luogo, e sarebbe anzi essenzialissimo di ben distinguere il moltiplicando, e il moltiplicatore, come vedremo a suo luogo.



30  
39. Di quì nasce una maniera di verificare il prodotto, ossia di esaminare se la moltiplicazione è giusta. Si assuma a moltiplicando quel numero che prima era moltiplicatore, e viceversa si prenda a moltiplicatore quel numero che prima era moltiplicando, e si rifaccia così la moltiplicazione; il prodotto deve tornar lo stesso, se la prima volta si operò esattamente.

40. Ma trattandosi di moltiplicazioni i cui fattori sieno composti di assai cifre, la prova suddetta riesce laboriosa ed incomoda. Si può allora usarne un'altra che dicesi la prova del 9. Suppongo, per esempio, di aver moltiplicato 23 per 12. Questa moltiplicazione mi ha dato 276 per prodotto. Vorrei vedere se un tal prodotto sia giusto. Opero a questo fine nel modo seguente. Tolgo primamente la cifra 9 quante volte posso dal moltiplicando 23, e noto il residuo 5 come si vede qui contro. Indi tolgo il 9 quante volte posso dal moltiplicatore 12, e noto il residuo 3. Poi moltiplico insieme questi due residui, e dal loro prodotto 15 tolgo il 9 quante volte è possibile, e noto il residuo 6. Tolgo finalmente il 9 quante volte posso dal proposto prodotto 276, e noto il residuo 6, che essendo uguale al precedente, indica che 276 è il vero prodotto di 23 moltiplicato per 12. Ecco un altro esempio.

41. Voglio esaminare se 18 moltiplicato per 14 dia veramente il prodotto 252. Operando come sopra, tolgo dapprima il 9 quante volte posso dal moltiplicando 18, ed ho un residuo 0, che noto come si vede qui contro. Poi tolgo il 9 quante volte posso dal moltiplicatore 14 e noto il residuo 5. Indi moltiplicando insieme questi due residui ho evidentemente

$$\begin{array}{r} 5 \mid 6 \\ 3 \mid 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \mid 0 \\ 5 \mid 0 \end{array}$$

31  
un prodotto che è 0. Da questo prodotto dovrei togliere il 9, ma lo 0 non comprende il 9, resta dunque intatto lo 0, che in questo caso può considerarsi tutt'insieme e come prodotto, e come residuo; noto dunque 0. In fine tolgo il 9 quante volte posso dal dato prodotto 252, e noto il residuo 0, che essendo uguale al precedente, m'insegna che 252 è realmente il prodotto di 18 moltiplicato per 14.

42. La prova chiamata del 9 è dunque espressa dalla seguente regola. 1.° Si tolga il 9 quante volte si può dal moltiplicando, e si noti il residuo. 2.° Si tolga il 9 quante volte si può dal moltiplicatore, e si noti il residuo. 3.° Si moltiplichino insieme i due residui, e dal loro prodotto si tolga il 9 quante volte si può, e si noti il residuo. 4.° Finalmente si tolga il 9 quante volte si può dal proposto prodotto, e si noti il residuo. Se la moltiplicazione è ben fatta, l'ultimo de' notati residui dee trovarsi uguale al precedente.

43. Per dimostrar questa regola ripiglio l'esempio del n.° 40. Là 23 è il moltiplicando, 12 è il moltiplicatore, 276 è il prodotto su cui cade l'esame. Ora nello spogliare ch'io faccio il moltiplicando 23 di tutti i suoi nove, lo spezzo in due parti, una è la somma di tutti i nove compresi in esso moltiplicando, l'altra è il residuo. Ma 23 comprende due volte il nove, e lascia cinque unità di residuo; dunque 23 può esprimersi come segue: 2 volte 9, più 5. Ragionando similmente trovo che il moltiplicatore 12 è esprimibile come segue: 1 volta 9, più 3. Dunque 23 moltiplicato per 12 è manifestamente uguale al complesso 2 volte 9, più 5 moltiplicato per l'altro complesso 1 volta 9, più 3. Per eseguire la moltiplicazione tra questi



32  
 fattori così *trasformati* veggo, che mi conviene ripetere il complesso 2 volte 9, più 5: per nove volte, più tre volte. Una siffatta ripetizione mi somministra la seguente quantità: 18 volte 9, più 5 volte 9, più 6 volte 9, più 15, e addizionando tutti i 9 che si trovano *esplicitamente* in questa quantità, ho il complesso 29 volte 9, più 15; complesso, che si uguaglia al proposto prodotto 276, se un tal prodotto sia giusto. Dunque se il complesso è uguale al prodotto, spogliando l'uno e l'altro de' suoi nove, si deve ottenere un residuo uguale. Ma 29 volte 9, prima parte del complesso, privata che sia de' suoi nove, non lascia evidentemente residuo alcuno; dunque la sola seconda parte 15 spogliata de' suoi nove, deve darmi tutto il residuo, e questo residuo si uguaglia, come abbiam detto, a quello che si trova spogliando immediatamente de' suoi nove il dato prodotto 276. Ma 15 è il prodotto de' due residui somministrati dal moltiplicando 23, e dal moltiplicator 12 privati dei loro nove; dunque, se la moltiplicazione è ben fatta, il prodotto di questi due residui spogliato de' suoi nove deve lasciare lo stesso residuo, che si ottiene spogliando a dirittura de' suoi nove il prodotto, come prescrive la regola. Un consimile ragionamento si applica a tutti i casi: la regola è dunque generalmente dimostrata.

44. La prova surriferita chiamasi la prova del 9, perchè in essa viene impiegata la cifra 9. Ma qualunque altra cifra servirebbe egualmente. Infatti nei casi proposti ai n. 40, e 41 si adoperi, a cagion d'esempio, la cifra 5, e nella dimostrazione recata al n.º 43 si sostituisca al 9 il 5, e con questa nuova cifra si ripeta la operazione, e la dimostrazione: la nuova operazione condurrà al risultato.

33  
 sultato stesso di prima, e la nuova dimostrazione sosterrà per egual modo la nuova operazione. Ma perchè dunque la cifra 9 ebbe ella la preferenza? Per accorciare sensibilmente la pratica. Infatti se da 10, o da 100, o da 1000 ec. si tolga il 9 quante volte si può, avrassi costantemente 1 di residuo. Per dimostrarlo io osservo, che sottraendo 1 da 10, o da 100, o da 1000 ec. i numeri, che rimangono dopo una tal sottrazione sono espressi unicamente da uno, o più nove (24), e però se questi numeri vengano privati dei loro nove, non lasciano alcun residuo. Dunque viceversa, se da 10, o da 100, o da 1000 ec. si tolgan prima tutti i nove, il residuo non può esser mai differente dall'unità. Se poi si levino tutti i 9 da 20, o da 200, o da 2000 ec., il residuo sarà sempre 2. Imperocchè 20 è uguale a 10 più 10, 200 è uguale a 100 più 100, 2000 è uguale a 1000 più 1000 ec. Dunque ch'io tolga tutti i 9 da 20, ch'io li tolga da 10 più 10 è lo stesso; ch'io tolga tutti i 9 da 200, ch'io li tolga da 100 più 100 torna il medesimo, e così discorrendo. Ora 10 spogliato del suo 9 dà 1 di residuo; dunque 10 più 10, ossia 20 spogliato de' suoi 9 deve dare 2 di residuo. Lo stesso argomento vale per 200, per 2000 ec. Un raziocinio affatto consimile ci servirà a dimostrare, che se tolgansi tutti i 9 da 30, o da 300, o da 3000 ec. rimarrà sempre 3: se tutti i 9 vengano sottratti da 40, o da 400, o da 4000 ec. rimarrà sempre 4 ec. ec. Dunque per togliere il 9 da un numero qualunque, per esempio, 823 ch'è uguale a 800 più 20 più 3, basta addizionare le cifre 8, 2, 3 come fossero unità semplici, e togliere dalla somma tutti i 9. Così il calcolo riesce speditissimo. A sem-



pre maggior brevità si tolga il 9 a misura che si vanno addizionando le cifre.

45. Non è per altro a tacersi, che questa prova non è infallibile. Possono commettersi nel calcolo della moltiplicazione degli errori, che restino occulti anche dopo la verificaione. Questi sono: 1.° La trasposizione delle cifre nel prodotto, come chi scrivesse 192342 falso prodotto di 823 moltiplicato per 354 in vece di 291342 vero prodotto. E' evidente, che tolti tutti i 9 da entrambi i numeri il residuo è lo stesso, e nondimeno il primo di questi numeri è un falso prodotto. 2.° Lo scrivere nel prodotto dei zeri in vece di 9, o anche dimenticare i 9, e nulla mettere in loro vece. 3.° Ingannarsi sopra qualche cifra del prodotto, e sbagliare ugualmente, ma in senso opposto su qualche altra cifra. E' manifesto, che la somma delle cifre essendo in tal caso la medesima come se il prodotto fosse giusto, la prova non scuopre l'errore; così chi scrivesse 291252 in vece di 291342 avrebbe, tolti i 9, lo stesso residuo 3, e pure il primo numero è un falso prodotto di 48557 per 6. Ma tali errori son difficili a commettersi in pratica, e non debbono impedir l'uso di una regola tanto spedita.

46. Ecco finalmente alquanti esempj di moltiplicazioni, su cui potranno gli studiosi esercitarsi.

|         |         |              |
|---------|---------|--------------|
| I. 5874 | II. 466 | III. 3020804 |
| 685     | 1002    | 570504       |
| <hr/>   | <hr/>   | <hr/>        |
| 29370   | 932     |              |
| 46992   | 466     |              |
| 35244   | <hr/>   |              |
| <hr/>   | 466932  |              |
| 4023690 |         |              |

# Divisione.

47. **E'** a tutti noto che questa parola *dividere* significa *spezzare* un tutto in più parti. Dunque la *divisione* consiste nello spezzare un numero in più parti. La diversità unica, che passa tra la divisione *generica*, e la divisione *aritmetica* si è, che nella prima le parti possono essere eguali o ineguali indistintamente, ma nella seconda debbono essere costantemente eguali. Ora di queste parti nelle quali vengon spezzati i numeri dalla divisione, o si conosce il *valore*, cioè si conosce di quante unità sia composta ciascuna parte, e si cerca il *numero*; o si conosce il *numero*, e si cerca il *valore*. Mi si dia, per esempio, il 15 a dividere in parti composte ognuna di cinque unità; io so dunque quante unità formar debbano ciascuna di quelle parti nelle quali va diviso il 15: conosco dunque il valore di queste parti, ma non so in quante di esse possa venir spezzato il 15, e questo appunto debbo io determinare; ne cerco dunque il numero. Ma se per l'opposito mi venga proposto di dividere il 15 in tre parti, io allora ne conosco il numero, e cerco di quante unità debba ciascuna di loro esser composta, ossia ne cerco il valore. Ora in qualunque divisione, dato il valor delle parti, se ne troverà sempre il numero, e dato il numero se ne troverà il valore, solchè si trovi quante volte la quantità nota si contenga entro al numero proposto a dividersi. Nel primo caso questa proposizione è di palmare evidenza: nel secondo caso riflettasi, che *ad ogni volta* che la data quantità entra nel numero proposto a dividersi corrisponde una unità del cercato valore; dunque *a tutte la volte* che la data quantità entra nel



numero proposto a dividersi corrispondono tutte le unità componenti il cercato valore, e però se sapremo quante sieno tutte queste volte, sapremo anche da quante unità sia formato il richiesto valore. Per la qual cosa lo scopo immediato della divisione egli è di *cercar quante volte un dato numero è contenuto in un altro*. Il numero contenente, ossia il numero proposto a dividersi (che ben si vede dover essere il più grande) chiamasi *dividendo*: il numero contenuto, cioè il numero per cui si divide (che deve essere il più piccolo) dicesi *divisore*: il numero, che esprime quante volte il divisore è contenuto nel dividendo, o il dividendo contiene il divisore, si nomina *quoziente* o *quoto*.

48. Egli è subito manifesto, che si troverà il quoto col sottrarre il divisore dal dividendo finchè sia possibile, vale a dire, finchè il dividendo sia esaurito, cioè non lasci alcun residuo: o se non venga egli esaurito, il residuo che lascia sia più piccolo del divisore: il numero delle sottrazioni, che dovranno farsi esprimerà quante volte il dividendo contiene il divisore, ossia darà il quoto.

49. Suppongo, ad esempio, di voler conoscere quante volte il 12 contenga il 4, ossia il quoto di 12 diviso per 4: comincio dal sottrarre 4 da 12, rimane 8; indi sottraggo 4 da 8, rimane 4 da cui togliendo 4, rimane 0. Ho dunque sottratto tre volte il divisor 4 dal dividendo 12, con che ho esaurito questo dividendo, e però concludo, che 12 contiene 4 tre volte, e che in conseguenza 3 è il cercato quoziente di 12 diviso per 4. Ora se da 12 sottraendo 4 tre volte non si ha residuo alcuno, chi non vede che 12 è composto di 4 ripetuto tre volte? Dunque moltiplicando 4, che qui è divisore, per 3, che è quoziente, dee

aversi 12, che è dividendo. Ma lo stesso raziocinio si applica a tutti i casi ne' quali il dividendo è esauribile dal divisore. Dunque, in tali casi, *il prodotto del divisore pel quoziente restituisce il dividendo*.

50. Si cerchi presentemente il quoto di 14 diviso per 6. Togliendo 6 da 14, resta 8: togliendo 6 da 8 resta 2, dal quale non potendosi più sottrarre il 6, ne viene che 14 è formato da 6 preso due volte, e più da due unità, le quali dovrebbero anch'esse dividersi per 6, ma essendo impossibile il dividerle *effettivamente*, perchè un numero qualunque non contiene un altro numero più grande di lui, bisogna dividerle almeno *indicativamente*, e questa indicazione consiste nello scrivere il divisor 6 sotto il residuo 2, tirando fra di loro una linea orizzontale così:  $\frac{2}{6}$ , espressione, che si pronunzia *due diviso per sei*, oppure *due sesti*. Dunque il quoziente completo di 14 diviso per 6 è 2 più  $\frac{2}{6}$ . Questo quoziente ha, come si vede, due parti. La prima parte, cioè 2, che nasce dalla divisione effettiva, io chiamola quoziente *effettivo*: la seconda parte, cioè  $\frac{2}{6}$ , che si ha dalla divisione indicata, l'appello quoziente *indicato*. Vedremo a suo luogo la idea precisa che corrisponde ad un quoziente indicato. Ma se 14 contiene 6 due volte, e più un residuo 2, egli è chiaro che, moltiplicando il divisor 6 pel quoziente 2, e al loro prodotto 12 aggiungendo il residuo 2, dee risultare il dividendo 14. Applicando il medesimo discorso a tutti que' casi, nei quali il dividendo non è esauribile dal divisore, si proverà che, in simili casi, *il prodotto del divisore pel quoziente, più il residuo della divisione restituisce il dividendo*.

51. La natura intima della divisione consiste dun-



que nella *iterata sottrazione*, e però la divisione immediatamente deriva dalla sottrazione (14), anzi è una cosa istessa colla sottrazione. Non è pertanto *necessario* di prevalersi di quella operazione dell' Aritmetica, che dicesi *divisione*, la quale *quanto alla pratica presa generalmente* è assai diversa dalla semplice sottrazione. Noi per altro appoggiati ad argomenti simili a quelli già esposti in favore della moltiplicazione (28), farem qui conoscere il modo di eseguire la divisione.

52. Il quoziente d'un numero semplice diviso per un altro numero semplice non può aversi *direttamente*, se non per mezzo della semplice sottrazione. Così, volendo il quoziente di 9 diviso per 3, bisogna sottrarre iteratamente 3 da 9, finchè si possa, si troverà che la sottrazione può farsi tre volte, e però che 3 è il quoziente cercato (48). Medesimamente il quoto di un numero avente due cifre, diviso per un numero avente una cifra non si può, in molti casi, ottenere direttamente, se non per mezzo della consueta sottrazione. Si voglia, ad esempio, dividere 56 per 7: questo si farà sottraendo 7 da 56 quante volte si può; troveremo, che la sottrazione può farsi otto volte, e però, che 8 è il quoziente cercato. Ma per non avere a cercar sempre in siffatta maniera questi quozienti, il che riuscirebbe penoso, conviene imprimerseli nella memoria, cosa che non difficilmente si ottiene coll'esercizio. Oltracciò, un mezzo agevolissimo per conoscerli ci è presentato dalla Tavola di Pitagora. (35. 36)

53. Intanto sia un numero composto di più di due cifre, che abbia a dividersi per un numero semplice. Prendo, in grazia di esempio, 846 a dividendo, e 2 a divisore, e per conoscere il quo-

to io osservo, che 846 è uguale a 800 più 40 più 6; dunque s'io dividerò per 2 una per una le parti 800, 40, 6, e unirò insieme i quoti parziali indi ottenuti; avrò il risultato medesimo come se dividessi a dirittura, e tutto di un colpo il proposto numero 846. Comincio dunque a dividere 800, prima parte del dividendo. Siccome 8 diviso per 2 dà per quoziente 4, così 800, ossia 8 replicato cento volte darà manifestamente per quoto 4 replicato cento volte, ossia 400, e però 400 sarà la prima parte del richiesto quoziente. M' inoltro poscia a divider 40, seconda parte del dividendo, e trovo con simil discorso, che 40 diviso per 2 dà per quoziente 20; dunque 20 è la seconda parte del cercato quoziente. In fine dividendo 6, terza ed ultima parte del dividendo, ed ho 3 per quoziente; dunque 3 è la terza, ed ultima parte del quoto che si cerca. Riunendo adesso in un sol tutte queste parti, o questi quoti parziali; avremo il total quoto cercato, che sarà 400 più 20 più 3, ossia 423. Ecco un altro esempio.

54. Suppongo di aver a dividere 4374 per 3. Decomponendo il 4374 nelle sue parti, cioè nella sue migliaja, centinaja, ec. ho 4000, più 300, più 70, più 4 a divider per 3. Incominciando a divider 4000, prima parte del dividendo, veggo che la cifra 4 divisa per 3 dà per quoziente 1 e avanza 1; dunque 4 ripetuto mille volte, cioè 4000 dà manifestamente per quoto 1 ripetuto mille volte, cioè 1000, e avanza 1000; dunque la prima parte del cercato quoziente è 1000, e ci è un residuo 1000, che debbo esso pure divider per 3: ma 1000 diviso per 3 non può evidentemente dare al quoto alcun numero di migliaja; dunque unisco questo residuo 1000, pria di divi-



derlo, a quelle centinaja che formano la seconda parte del dividendo proposto, e per tal modo ho 1300, ossia, 13 centinaja da divider per 3: ma 13 diviso per 3 dà per quoziente 4, e resta 1; dunque 13 replicato cento volte, ossia 1300, dà necessariamente per quoto 3 replicato cento volte, ossia 300, e resta 100, e però la seconda parte del domandato quoziente sarà 300, e si avrà un residuo 100, che va diviso anch'egli per 3: ma 100 diviso per 3 non può somministrare al quoto alcun numero di centinaja; dunque lo aggiungo, ancora intatto, alle decine formanti la terza parte del dividendo totale, ed ho 170, cioè 17 decine, da divider per 3. Trovo che 17 diviso per 3 dà per quoto 5, e rimane 2; dunque 170 dà per quoziente 50, e rimarrà 20, perciò 50 e la terza parte del domandato quoziente, e resta 20 a divider per 3: ma 20 diviso per 3 non può dare veruna decina al quoziente, perchè la cifra 2 non contenendo neppur una volta la cifra 3, e però non dando al quoziente neppur una unità, è manifesto che 2 replicato dieci volte, ossia 20, diviso per 3 non potrà dare neppur dieci unità al quoziente, ossia neppure una decina, unisco dunque questo residuo 20, tutt'ora indiviso alle unità componenti la quarta, ed ultima parte del total dividendo, e così ho 24 a divider per 3: ora 24 diviso per 3 dà per quoziente 8 e nulla avanza; dunque 8 è la quarta, ed ultima parte del richiesto quoziente. Raccogliendo ora tutti i quoti parziali trovati sopra, formo l'intero quoto, che è 1000, più 400, più 50, più, 8 ossia 1458.

55. Cerchisi presentemente il quoto di 2485 diviso per 5. Scompongo al solito il dividendo nelle sue parti, e per tal modo ho 2000, più 400,

più 80, più 5 a divider per 5. Incomincio a divider 2000: ma siccome la cifra 2 non contiene neppure una volta il divisor 5, e perciò non dà al quoto neppur un'unità; così 2000 non può evidentemente dare al quoto neppur un migliajo, e però la prima cifra del cercato quoziente sarà al più un numero di centinaja. Prendo adunque tutto di un colpo e le migliaja, e le centinaja del dividendo, ed ho per tal modo 2400 a divider per 5. Fatta la divisione trovo un quoziente 400, ed un avanzo 400. Ragionando su di questo avanzo, e sopra quegli altri tutti, che si possono avere in progresso, come si ragionò nel precedente articolo, e operando conformemente a siffatti raziocinj, si avrà 90 per seconda parte, e 7 per terza, ed ultima parte del cercato quoziente, nè troverassi in fine residuo alcuno. Il quoziente totale sarà dunque 400, più 90, più 7, ossia 497.

56. Diasi ora 8436 a divider per 4. La consueta decomposizione del dividendo mi presenta 8000, più 400, più 30, più 6 a divider per 4. Incomincio a divider 8000, e trovo 2000, per quoziente, e niun residuo; dunque procedo subito a divider 400, ed ho 100 di quoziente, e nessun resto, e però immediatamente passo a divider 30, ma giunto qui veggo che il divisor 4 non entra neppure una volta nella cifra 3, e però conchiudo che 30 non può dare verun quoto di decine, dunque 0 decine si è la parte del total quoziente cercato rispondente alle 3 decine del dividendo, le quali rimangono ancora intatte: ma siccome debbono esse pure andar divise; così le aggiungo alle unità formanti la parte ultima del proposto dividendo, ed ho 36 a divider per 4. Divido, e trovo 9 per quoziente, e nulla di avanzo. Tutti



dunque i quoti parziali ora trovati sono: 2 migliaia: 1 centinajo: 0 decine: 9 unità, i quali formano il total quoziente cercato uguale a 2109. Si vede colla più lucida evidenza, che lo zero posto al quoziente è necessario a mantenere il valore relativo delle cifre significative di esso quoziente il qual verrebbe a mutarsi, se lo zero si trascurasse. Nel caso nostro, per esempio, il quoziente è 2109: ma lasciando lo zero, ei diverrebbe 219, e saria perciò dieci volte minore del giusto, siccome è noto a chiunque sappia i principj della numerazione. Dunque ogni qual volta una parte del dividendo, purchè non sia la prima. (n.º preced.) non contiene il divisore, si dee per necessità scrivere zero al quoziente.

57. Ma il modo che abbiám tenuto sin qui nel fare la divisione, quello non è che usasi comunemente; l'aver però considerato la cosa sotto il precedente aspetto gioverà ad intendere l'operazione pratica, che è la seguente. Presi di nuovo a dividendo, e a divisore i due numeri dell'articolo 54, scrivo il dividendo 4374, e il divisor 3, amendue nella riga medesima, come si vede qui contro: indi separo il dividendo dal di- . . . .

|                       |      |           |  |   |                 |
|-----------------------|------|-----------|--|---|-----------------|
| visore con una linea  | 4374 | dividendo |  | 3 | divisore        |
| verticale finalmente  | 3    |           |  |   | 1458 quoziente. |
| tiro sotto del solo   | —    |           |  |   |                 |
| divisore una linea    | 13   |           |  |   |                 |
| orizzontale, che se-  | 12   |           |  |   |                 |
| parerà il divisore    | —    |           |  |   |                 |
| dal quoziente, il     | 17   |           |  |   |                 |
| quale suol collocarsi | 15   |           |  |   |                 |
| sotto di questa li-   | —    |           |  |   |                 |
| nea. Dopo siffatte    | 24   |           |  |   |                 |
| preparazioni inco-    | 24   |           |  |   |                 |
| mincio a dividere     | —    |           |  |   |                 |
| quella cifra del di-  | 00   |           |  |   |                 |
| videndo che è più     |      |           |  |   |                 |

vicina alla mia sinistra, la qual cifra io considero come il primo *membro* della divisione, e per non confondere questa cifra colle altre, la distinguo ponendo su di lei un punto, la qual distinzione farò sempre ad ogni cifra, che successivamente soffrirà la divisione. Adesso dico: 3 in 4 sta una volta, scrivo 1 al quoziente, indi moltiplicando il quoziente trovato pel divisore ho un Prodotto 3, che deve esprimere un numero di migliaia (54), vale a dire, ho quella parte di dividendo che fu realmente divisa (50). Queste tre



44  
migliaja, che hanno già sofferto la divisione, debbono manifestamente sottrarsi dal total dividendo, onde aver quella parte di lui, che rimane tuttora a dividersi: sottraggo dunque 3 dalla cifra 4, che le migliaja esprime del dividendo, e trovo 1 di residuo alla cui destra dovrei porre le tre altre cifre del dividendo, perchè 4374 meno 3000 è uguale a 1374: ma son contento di scrivere alla destra del residuo 1 la prossima cifra 3 del dividendo, mentre egli è sopra 13, che debbo ora eseguire la divisione (54). Dunque 13 è il secondo membro della divisione, e però dico: 3 in 13 sta quattro volte; scrivo 4 al quoziente alla destra della prima sua cifra 1: indi multiplico per 4 il divisor 3, e sottraendo il prodotto 12 dal dividendo parziale 13, ho 1 di differenza accanto alla quale colloco la prossima cifra 7 del total dividendo, e mi viene così 17, terzo membro della divisione. Seguo dunque dicendo: 3 in 17 sta cinque volte; scrivo al quoziente la cifra 5 alla destra della cifra 4, poi multiplico per 5 il divisor 3, sottraggo il loro prodotto 15 da 17 attuale membro della divisione, e trovo un residuo 2, alla cui destra pongo la prossima cifra 4 del dividendo, ed ho 24, quarto membro della divisione, che diviso per 3 dà per quoziente 8; scrivo dunque al quoziente totale la cifra 8 alla destra della cifra 5, indi moltiplicando 3 per 8, e sottraendo il prodotto 24 dal dividendo parziale 24 ho di residuo 0, e siccome il dividendo totale non ha più altre cifre, così la operazione è compiuta, e conchiudo, che 1458 è il quoto di 4374 diviso per 3, come già si trovò (54).

58. Siano ora i due numeri dell'articolo 55, che si vogliano dividere l'uno per l'altro. Scrivo

il dividendo 2485, e il divisor 5, come nell'esempio precedente, e come si vede qui ....  
contro: poi comin- 2485 dividendo | 5 divisore  
cio a voler divide- 20  
re al solito la prima cifra a sinistra 48  
del dividendo; ma 45  
vedo che 2 non contiene 5, e però dico: 5 in 2 non ci sta, dunque nulla scrivo al quoto, ma 00  
invece trasporto il punto alla prossima cifra 4 del dividendo, ed assumo 24 a primo membro della divisione, poi dico: 5 in 24 sta quattro volte, e però 4 è la prima cifra del quoziente cercato. Scrivo dunque 4 sotto alla linea orizzontale, poi multiplico per questo 4 il divisore 5, sottraggo il prodotto 20 da 24 attuale membro della divisione, ed ho 4 di residuo, sul qual residuo, e sugli altri che possono trovarsi in seguito, operando come abbiamo insegnato qui sopra (n.º preced.), verrà 9 per seconda cifra, e 7 per terza, ed ultima cifra del cercato quoziente, il quale per conseguenza sarà 497, come già si vide (55).



59. Finalmente, per dividere l'un per l'altro i due numeri dell'articolo 56, dispongo il dividendo 8436, e il divisor 4, come si . . . vede nell'esempio, e opero al solito (54), avvertendo però bene di considerare lo zero siccome terza cifra del cercato quoziente, giacchè nel seguito della operazione m'imbatto a trovare per terzo membro della divisione il numero 3, in cui non entra il divisor 4 (56). Di questo modo io veggio che 8436 diviso per 4 dà per quoziente 2109, come deve essere (56).

60. Ecco ora alquante divisioni di numeri composti per numeri semplici, ch'io ad eseguir propongo per esercizio.

I.  $43677 \overline{) 9}$     II.  $29666 \overline{) 7}$     III.  $1410 \overline{) 6}$

$$\begin{array}{r}
 4238 \\
 \hline
 16 \\
 14 \\
 \hline
 26 \\
 21 \\
 \hline
 56 \\
 56 \\
 \hline
 00
 \end{array}$$

61. Passiamo ora a dir brevemente della divisione fra due numeri composti. Si voglia, ad esempio, dividere 269742 per 134. Scrivo nella consueta maniera il dividendo, e il . . . divisore, come si vede qui contro  $269742 \overline{) 134}$  poi incomincio a riflettere, che 268 siccome il divisore conta tre cifre, così è egli in parte composto di centinaja. Di qui deduco evidentemente, che il divisore proposto non può contenersi se non entro un numero di centinaja per lo meno, e che in conseguenza la parte del dividendo, da cui può incominciarsi la operazione, ossia il primo membro della divisione, deve contare almeno tre cifre, cioè tante quante ne conta il divisore. Punteggio dunque la terza cifra del dividendo ( prendendo le cifre da sinistra a destra ), e ( facendo astrazione per un momento dal relativo valor delle cifre ) ho 269 a primo membro della divisione. Ora per dividere 269 per 134 dico così: 1 in 2 sta due volte, e nulla avanza: 3 in 6 sta due volte, e nulla avanza: il 4 in 9 sta due volte, e avanza 1; dunque le centinaja del divisore son contenute due volte nelle centinaja del dividendo, le decine del divisore son contenute due volte nelle decine del dividendo, le unità del divisore son contenute due volte nelle unità del dividendo; dunque tutte le parti del divisore son contenute due volte nelle parti corrispondenti del dividendo; dunque tutto il divisore è contenuto due volte in tutto il dividendo; dunque 2 è il quoto di 269 diviso per 134, e però 2 è la prima cifra del cercato quoziente. Scrivo dunque 2



sotto la linea orizzontale nel sito destinato al quoziente, poi multiplico per 2 il divisore 134, e sottraggo il prodotto 268 dal dividendo parziale 269; ho di residuo 1, alla cui destra pongo la seguente cifra 7 del dividendo con che ho 17, secondo membro della divisione. Ma vedo subitamente, che 134 non è contenuto in 17, dunque dico: 134 in 17 non ci sta. Scrivo 0 al quoziente alla destra del 2 (56), indi abbasso accanto al 17 la prossima cifra 4 del dividendo, e così mi viene 174, terzo membro della divisione. Dico dunque: 1 in 1 sta una volta, e nulla avanza: 3 in 7 sta una volta, e avanza 4, che unito alla seguente cifra 4 del dividendo ci dà 44: 4 in 44 sta una volta, e avanza 40; dunque 134 sta una volta in 174; dunque 1 è la terza cifra del quoziente cercato. Scrivo 1 al quoziente alla destra dello zero, multiplico il divisore per 1, tolgo il prodotto dal parzial dividendo, trovo 40 di residuo, alla sua destra pongo l'ultima cifra 2 del dividendo totale, ho per tal modo 402, quarto membro della divisione, su del quale ragionando, ed operando come si è fatto sugli altri, io trovo che 134 si contiene tre volte in 402; dunque 3 è la quarta cifra del quoziente cercato. Scrivo 3 al quoziente, levo dal parzial dividendo il prodotto del divisore multiplico per 3, ed ho 0 di residuo. Qui si termina la divisione, giacchè non ha il proposto dividendo altre cifre, e però il richiesto quoziente di 269742 diviso per 134 è 2013. Ecco un altro esempio.

62. Suppongo di aver a dividere 147475 per 362. Scrivo dapprima, secondo il costume, i dati numeri, come si vede qui contro: indi con un punto posto . . . sulla terza cifra a sinistra del 147475 | 362 dividendo, ne separo le tre prime cifre 147, perchè altrettante sono le cifre del divisore 141 (n.º preced.). Fatto questo incomincio a dire: 3 in 1 non ci sta, dunque le unità più alte del divisore non si contengono nelle unità più alte del dividendo parziale, e però neppur tutto il divisore può contenersi in tutto il parzial dividendo; dunque io prendo le quattro prime cifre del total dividendo, vale a dire, prendo 1474, poi dico: 3 in 14 sta quattro volte, e avanza 2, che unito alla prossima cifra 7 dà 27: 6 in 27 sta quattro volte, e avanza 3, che unito alla cifra vicina del dividendo mi dà 34: 2 in 34 sta quattro volte, e avanza 26; dunque 362 sta quattro volte in 1474, e però 4 è la prima cifra del cercato quoziente. Scrivo pertanto 4 al quoziente, poi multiplico il divisore 362 per 4, e sottraggo il prodotto 1448 dal dividendo parziale 1474; ma per fare questa sottrazione di un modo compendioso operò come segue. Multiplico per 4 le 2 unità del divisore, e vengono al prodotto 8 unità, che debbo sottrarre dal parzial dividendo: dico adunque: 8 non può levarsi da 4, o più brevemente, 8 da 4 non si può, ma un'unità presa in prestito dalla antecedente cifra 7 del dividendo accrescerà di una decina il 4, e renderlo 14, dico dunque: 8 da 14 resta 6, scrivo 6 sotto 4, indi multiplico per 4 le 6 decine del divisore, ed ho 24 decine, che sottraggo dalle de-



cine del dividendo con dire: 24 da 6 non si può ( dico da 6, e non da 7, perchè la cifra 7 fu diminuita di un' unità ); dunque prendo due unità dalla prossima cifra 4 del dividendo con che il 6 diventa 26, e dico: 24 da 26 resta 2, che scrivo sotto al 6: finalmente multiplico per 4 le 3 centinaja del divisore, e sottraggo le 12 centinaja risultanti dalle centinaja del dividendo con dire: 12 da 12 0, che non iscrivo perchè in questo caso è inutile. Dunque 26 è il cercato residuo. Il sottrarre un numero da un altro nel modo ora indicato si dice *sottrarre a mente*, ed è visibile questo metodo essere più assai spedito dell' ordinario. Ma, tornando alla nostra divisione da cui ci eravamo per una utile digressione alquanto allontanati: alla destra del trovato residuo 26 colloco la seguente cifra 7 del dato dividendo, ed ho 267, secondo membro della divisione: ma il divisor 362 non cape in 267, mentre le 3 unità più alte del divisore non entrano nelle 2 unità più alte del parzial dividendo, e però dico: 362 in 267 non ci sta. Scrivo 0 al quoziente, indi alla destra del 267 pongo l'ultima cifra 5 del dividendo totale, con che ho 2675, terzo membro della divisione; dico dunque: 3 in 26 sta otto volte, e avanza 2 il quale colla seguente cifra 7 del parzial dividendo mi dà 27: 6 in 27 non istà otto volte; ma se le decine del divisore non entrano nelle decine del parzial dividendo, neppur tutto il divisore può entrare in tutto questo dividendo: ricomincio dunque la operazione, e dico: 3 in 26 sta sette volte, e avanza 5, che unito alla prossima cifra 7 del parzial dividendo mi dà 57: 6 in 57 sta pur sette volte, e avanza 15, che colla seguente cifra 5 del parzial dividendo mi dà 155: 2 in 155 entra 7

volte, e avanza 141. Dunque 362 entra sette volte in 2675; dunque 7 è la terza cifra del cercato quoziente. Scrivo 7 al quoziente, multiplico per 7 tutto il divisore, e sottraendo il prodotto a mente, trovo un residuo 141. Dovrei dividere un tal residuo per 362, ma la divisione *effettiva* non è possibile; dunque mi contento della divisione indicata (50), e però la parte ultima del richiesto quoziente è  $\frac{141}{362}$ , espressione numerica che si pronunzia: *cento quaranta uno diviso per trecento sessanta due*, oppure *cento quaranta uno trecento sessantesimi secondi*.

63. Nei due esempj soprarrecati noi abbian paragonato una per una ogni cifra del divisore colle parti corrispondenti dei dividendi parziali, ma in pratica possiam contentarci di trovar solamente quante volte le unità più alte del divisore entrano nelle unità più alte del dividendo parziale, giudicando quel numero di volte essere il parzial quoziente cercato. Siffatto giudizio è veramente illusorio, e la cifra supposta del quoto può esser falsa, tanto a cagione di questa pratica, quanto anche per non esser impossibile di ingannarsi in determinar quante volte la più alta parte del divisore stia uella più alta parte del dividendo parziale. Ma in tutti i casi la moltiplicazione del divisore per la supposta cifra del quoto scuopre l'errore, se vi è, e insegna a correggerlo, ed a fissar diffinitivamente la vera cifra richiesta. Infatti questa moltiplicazione può dare un prodotto di tre specie, vale a dire: 1.º grande per modo, che non possa levarsi dal parzial dividendo: 2.º piccolo tanto, che fatta la debita sottrazione, il residuo superi il divisore: 3.º tale che lasci un residuo più piccolo del divisore. Nel primo caso la cifra supposta è manifestamente troppo



grande, e però si debbe diminuire di un'unità, o di due, o di tre, o di ec. finchè la sottrazione possa eseguirsi. Nel secondo caso la cifra supposta è troppo piccola, mentre chi non vede che nel residuo, il quale fa parte del dividendo parziale, il divisor si contiene almeno una volta; convien dunque accrescer la cifra di una o più unità secondo è d'uopo, per aver dalla sottrazione un residuo più piccolo del divisore. Nel terzo caso la cifra supposta è la vera.

64. E' anche da osservarsi, che ad ogni parziale divisione non può mettersi più di 9 al quoziente. Imperocchè, o il dividendo parziale comprende tante cifre quante ne ha il divisore, e insieme supera il divisore, così che la divisione sia possibile, e in tal caso il quoziente non può mai vincer 9, perchè ove fosse soltanto 10, moltiplicando il divisore per questo quoziente 10 verrebbe un prodotto avente una cifra di più del parziale dividendo, e però maggiore di esso dividendo, il che ripugna: o il dividendo parziale conta una cifra di più del divisore, nel qual caso la divisione è sempre eseguibile, e neppure allora il quoziente può mai superar 9. Supponghiamo infatti che si abbia a dividere 1459 per 146: siccome le tre prime cifre 145 del dividendo non formano un numero divisibile per 146, così mi convien prendere subito ad unico membro di divisione tutto il proposto dividendo 1459. Ora, se il quoziente potesse esser 10, o maggior di 10, bisognerebbe di necessità che la prima parte 145 del dividendo contenesse una o più volte il divisore, il che distrugge l'ipotesi. Dunque ec.

65. Compendiando quel che abbiain detto intorno la pratica della divisione, risulta per essa la se-

guente regola. 1.° *Scrivasi il divisore alla destra del dividendo, indi condotta fra loro una linea verticale, e tirata sotto del divisore una linea orizzontale, si separino con un punto da sinistra a destra tante cifre nel dividendo, quante ne ha il divisore, e se questo è più grande delle cifre separate si trasporti il punto sulla cifra seguente; questo sarà il primo membro della divisione, che darà la prima cifra del quoto.* 2.° *Si cerchi quante volte il divisore entra in questo membro della divisione (già non può entrarvi più di nove volte), e la trovata cifra del quoto si scriva sotto del divisore dopo la linea orizzontale.* 3.° *Si moltiplichi per la trovata cifra del quoto tutto il divisore, e il prodotto si sottragga dal membro della divisione.* 4.° *Alla destra del residuo nato da siffatta sottrazione si abbassi la seguente cifra del dividendo, e sarà questo il secondo membro della divisione, su del quale operando come sul primo, si avrà la seconda cifra del quoto, che si scriverà alla destra della prima cifra di esso.* 5.° *Si moltiplichi il divisore per la seconda cifra del quoto, e sottraendo il prodotto dal secondo membro della divisione, verrà un secondo residuo, alla cui destra collocando la prossima cifra del dividendo, si formerà il terzo membro della divisione, che darà, operando al solito, la terza cifra del quoto.* 6.° *Seguendo lo stesso metodo finchè sieno esaurite tutte le cifre del dividendo, si avran tutte quelle del quoziente cercato.* 7.° *Allorchè il divisore non cape in qualche membro della divisione, scrivasi 0 al quoziente.* 8.° *Se il membro ultimo della divisione lasci un residuo differente da 0, questo residuo dee anche esso dividersi, ma non essendo egli capace di una divisione effettiva, si usi invece la divisione indicata, tirando cioè, sotto al residuo una linea, e*



sotto la linea scrivendo il divisore, si avrà così una espressione che completerà il quoziente, e scriverassi alla destra delle sue cifre già ritrovate. 9.° Se il prodotto del divisore per una qualche cifra del quoto superi il membro della divisione, da cui questo prodotto deve sottrarsi; la cifra supposta è troppo grande, e conviene diminuirla di una, o se fa troppo, di più unità. 10.° Se per l'opposito il prodotto del divisore per una qualche cifra del quoto, sottratto dal corrispondente membro della divisione lascia un residuo più grande del divisore; la cifra supposta è troppo piccola, e debbe aumentarsi di una, o più unità, secondo il bisogno. Aggiungiam qui alcuni esempj di divisione da eseguire per esercizio.

$$\begin{array}{r} \text{I. } 16512 \mid 344 \\ \hline 48 \\ \text{II. } 3049164 \mid 6274 \\ \hline 486 \\ \text{III. } 71415 \mid 345 \\ \hline 207 \end{array}$$

66. Volendo verificare la divisione, quando non siasi trovato alcun finale residuo, basta moltiplicare il divisore pel quoziente. Si sa che, ove il quoziente sia giusto, questo prodotto deve restituire il dividendo (49). Se poi abbiavi in fine qualche residuo, bisogna moltiplicare il divisore pel quoziente effettivo, e al prodotto addizionare il finale residuo: questa somma dee ricomporre il dividendo (50). Non credo per altro inutile d'osservare che in questo secondo caso la cifra ultima del quoziente effettivo mancar potrebbe di qualche unità, il residuo finale essendo per isbaglio più grande del divisore, senzachè la prova scuoprissi il fallo.

67. Potrebbe anche alla divisione applicar la prova del 9 (42). Infatti tolto dal dividendo il

residuo finale della divisione, se vi è, la differenza esprime il prodotto del divisore pel quoziente effettivo. La cosa dunque riducesi a verificare una moltiplicazione, e se ci si manifesta un qualche errore, cade egli sul quoziente, perchè desso è il risultato che si disamina. Ma la prova più diretta e sicura della divisione si ricava dalla moltiplicazione (n.° preced.).

68. Mi venga ora proposto di divider 20 per 10. Veggo, che una decina entra tante volte a comporre due decine, quante volte un'unità entra a comporre due unità; e però 20 diviso per 10 dà lo stesso quoziente di 2 diviso per 1. Parimenti 80 diviso per 40 è uguale ad 8 diviso per 4. Così 900 diviso per 300 è il medesimo di 9 diviso per 3. Dunque, per semplificare il calcolo io stabilisco il seguente principio. *Dati a dividersi l'uno per l'altro due numeri terminati ciascuno da uno, o più zeri, si trascuri in amendue un ugual numero di zeri finali, e si dividano le rimanenti cifre del dividendo per le rimanenti del divisore.* Così venga proposto, ad esempio, di dividere 415000 per 2500; trascurando gli ultimi due zeri di amendue questi numeri, ho a dividere 4150 per 25. Il quoto è 166.

69. Ma se un numero terminato da più zeri si dovesse dividere per 10, o per 100, o per 1000 ec. basterebbe nel primo caso cancellare l'ultimo zero del dividendo, nel secondo caso cancellare gli ultimi due suoi zeri, nel terzo caso cancellarne gli ultimi tre ec.; cioè sempre tanti cancellarne, quanti nel proposto divisore seguono la unità. Così, volendo esprimere il quoto di 7450000 per 10, o per 100, o per 1000 ec., scrivo 745000, o 74500, o 7450 ec. Tutto questo deducesi senza fatica dai principj della numerazione.



70. Prima di abbandonar questa parte di Aritmetica, guardiam di nuovo con un'occhiata rapida la natura delle sue quattro operazioni principali, che ci siamo ingegnati fin qui di esporre il meglio, che abbiám saputo. Due di queste operazioni, cioè l'*Addizione*, e la *Moltiplicazione* accrescono i numeri; le due altre, vale a dire, la *Sottrazione*, e la *Divisione* il diminuiscono. Dunque le due operazioni nominate prima sono di opposta indole alle due nominate dopo. Infatti la addizione di due o più numeri, cioè di due, o più parti ne forma un solo numero, cioè un solo tutto: e la sottrazion per l'opposito di un numero solo, cioè di un solo tutto, che è il minuendo, ne forma due numeri, cioè due parti, che sono il minutore, e il residuo. La moltiplicazione poi, semplice compendio dell'addizione, da due numeri, ossia da due fattori cava un numero solo, ossia il prodotto: e al contrario la divisione, semplice compendio della sottrazione, da un numero solo, ossia da un prodotto cava due numeri, ossia due fattori, che sono il divisore, e il quoziente (a). Siccome adunque la sottrazione disfà quello che vien fatto dall'addizione, e la divisione quello disfà, che vien fatto dalla moltiplicazione, e viceversa; così egli è certo, che siffatte operazioni, se abbiano per oggetto i medesimi numeri, ponno servirsi mutualmente di prova. E veramente, che l'addizione serva di prova alla sottrazione, lo abbiám veduto quando abbiám detto, che a riputar giusto un residuo è necessario, che la somma di questo residuo, e del minutore si trovi uguale al minuendo, ossia

(a) Si parla qui del caso in cui la divisione non lascia un residuo finale.

che la somma delle parti si trovi uguale al tutto (26): ma non è men chiaro, che la sottrazione serve di prova all'addizione, mentre se una somma è giusta, togliendo da questa somma una delle sue parti, il residuo necessariamente si uguaglia alla somma delle altre parti. Medesimamente, che la moltiplicazione valga a provare la divisione lo abbiám accennato testè mostrando, che la verità di un quoziente (quando non acci residuo finale) esige, che il prodotto del divisore per questo quoziente restituisca il dividendo (66); ma egli è ugualmente manifesto, che la divisione serve a provare la moltiplicazione, giacchè la verità di un prodotto esige, che il quoziente di questo prodotto diviso per uno de' suoi fattori restituisca l'altro fattore. Alquanto di riflessione sulla opposta vicendevole corrispondenza delle quattro operazioni principali dell'Aritmetica svilupperà pienamente queste idee nella mente dei Giovinetti, che io non voglio più a lungo trattenere nella presente materia, introducendoli ora a contemplare una specie nuova di numeri originati dalla divisione, e suscettibili essi pure delle quattro medesime operazioni a cui van soggetti i numeri fin qui considerati.

#### *Idea delle Frazioni, ossia dei numeri rotti.*

71. Un numero, il quale contenga due volte, o tre volte, o quattro volte, o ec. un altro numero si chiama *doppio*, o *triplo*, o *quadruplo*, o ec. di quest'altro numero: e questo secondo si dice *sudduplo*, o *suttriplo*, o *suquadruplo*, o ec. di quel primo: e in generale, qualunque numero che contenga più volte esattamente un altro nume-



ro si appella *multiplo* di quest'altro, e il secondo *summultiplo* del primo. Dunque, facendosi la divisione fra due numeri tali, che il dividendo sia un multiplo del divisore, non si avrà residuo alcuno finale, ma il contrario accadrà quando si dividan due numeri l'uno de' quali non sia multiplo dell'altro. Così nell'Articolo 50 si è veduto, che dividendo 14 per 6 viene un quoziente effettivo 2, ed un residuo 2, che diviso indicativamente per 6 diede il quoziente indicato  $\frac{2}{6}$ . Ma quale idea dobbiamo noi formarci di questa espressione  $\frac{2}{6}$ ? Siccome ella mostra, che debba dividersi il 2 per 6, e il dividendo è qui un numero più piccolo del divisore, così questa operazione sembra impossibile, e quindi l'espression che ne nasce, contraddittoria. Ma questo paradosso svanirà facilmente, solchè si rifletta esservi il modo di conservare intatto il valor primitivo del dividendo 2, e insieme di esprimerlo con un numero più grande del divisore 6, onde la divisione riesca possibile, e il quoziente nulla più ci mostri di ripugnante. Infatti noi possiamo considerar le unità di cui è composto il dividendo 2 spezzate ciascuna in più parti eguali, di maniera che prendendo tante di queste parti, quante sono unità nel dividendo, si abbia un numero composto bensì di unità minori delle primitive, ma uguale in valore al dividendo, e rappresentante una pluralità maggiore del divisore 6; supponendo adunque, che ciascuna unità componente il dividendo 2 sia spezzata, per esempio, in sei parti uguali, cioè in tante parti quante sono le unità del divisor 6, e prendendo due volte queste sei parti, si cambierà il 2 in 12, numero le cui unità sono sei volte minori di quelle formanti il dividendo 2, ma perciò stesso uguale in valore

a questo dividendo, e rappresentante una pluralità maggiore del divisor 6. Allora la divisione sarà evidentemente possibile, e darà per quoziente 2, numero le cui unità sono sei volte minori, ovvero sono la sesta parte di quelle che compongono il dividendo 2. Dunque il quoziente di 2 diviso per 6, ossia la espressione  $\frac{2}{6}$  significa precisamente, che la unità componente il dividendo 2 fu spezzata in sei parti uguali, e che di queste parti se ne debbono prender 2. Una di esse parti dicesi *unità frazionaria*, e la espressione  $\frac{2}{6}$  dicesi *frazione*, o *numero frazionario*, o *numero rotto*, o anche semplicemente *rotto*: nomi ben indicanti, che il valore dell'espressione  $\frac{2}{6}$  deve esser più piccolo dell'unità componente il dividendo 2, cioè della unità primitiva, o principale.

72. Quello, che abbiain ragionato sulla frazione  $\frac{2}{6}$  si applica ugualmente a qualunque altra espressione che mostri la divisione di un numero minore per un numero maggiore. Così  $\frac{5}{8}$ , o *cinque ottavi* significa, che l'unità componente il dividendo 5, ossia l'unità principale fu scomposta in otto parti eguali, e che di queste parti se ne sono prese cinque:  $\frac{5}{8}$ , o *tre settimi* vuol dire che la unità principale fu spezzata in sette parti uguali, di cui se ne prendono tre; ec. ec.

73. Prima di andare innanzi osserviamo, che alle volte s'incontrano delle divisioni indicate, anche quando il dividendo uguaglia, o supera il divisore. Le espressioni, che da siffatta indicazione risultano, non saranno frazionarie che in apparenza, ma in realtà saranno o numeri interi, o per lo meno misti d'interi, e di rotte. Di questo genere sono le tre espressioni:  $\frac{4}{4}$ ,  $\frac{24}{6}$ ,  $\frac{36}{5}$ . Nella prima il dividendo uguaglia il divisore, e però il



suo valore è 1: nella seconda il dividendo supera il divisore, ed è insieme un multiplo del divisore, e però il valor suo dee essere un numero intero, si trova infatti, che  $\frac{2}{6}$  è uguale a 4: nella terza finalmente il dividendo supera il divisore, ma non è un multiplo del divisore, e però il valore di lei deve essere un numero misto d'intero e di rotto: e veramente  $\frac{3}{5}$  è uguale a 7 e  $\frac{1}{5}$ . Siccome adunque i valori delle succennate espressioni uguagliano, o superano l'unità principale, egli è chiaro, che non può loro competere, se non *impropriamente* il nome di frazioni, o di rotti, che però bene si chiamano *frazioni improprie, rotti improprij*, laddove l'altre espressioni che valgon meno dell'unità principale si appellano acconciamente *frazioni proprie, rotti proprj*.

74. Del resto la considerazione dell'unità principale spezzata in tante parti quante sono le unità del divisore, e di cui tante se prendono quante sono le unità del dividendo, si applica e ai rotti proprj, ed agli improprij, di modo che in entrambi il divisore determina la *specie* della unità frazionaria, e dà il *nome* a questa unità, e però dicesi *denominatore*, e il dividendo fissa qual *numero* di unità frazionarie di data specie si debba prendere, e però dicesi *numeratore*. Tanto poi il numeratore, quanto il denominatore si chiaman con mutuo nome, *termini della frazione*.

75. Siccome ad ogni specie di unità frazionarie, corrisponde un nome diverso tratto dal numero per cui si fa la divisione (n.º preced.); così a saper pronunziare un rotto qualunque è necessaria la cognizione di questi nomi. Ora le divisioni dell'unità principale pei numeri 2, 3, 4, 5..... 10, 11, 12, 13..... 20, 21, 22, 23, 24..... ec. ec. si pro-

nunziano come segue:  $\frac{1}{2}$  una metà:  $\frac{1}{3}$  un terzo:  $\frac{1}{4}$  un quarto:  $\frac{1}{5}$  un quinto .....  $\frac{1}{10}$  un decimo:  $\frac{1}{11}$  un undecimo:  $\frac{1}{12}$  un duodecimo:  $\frac{1}{13}$  un decimoterzo .....  $\frac{1}{20}$  un ventesimo:  $\frac{1}{21}$  un ventesimo primo:  $\frac{1}{22}$  un ventesimo secondo:  $\frac{1}{23}$  un ventesimo terzo:  $\frac{1}{24}$  un ventesimo quarto ec. ec. L'analogia insegna bastantemente a pronunziar tutte l'altre possibili divisioni dell'unità principale. Per legger dunque un rotto qualunque, dopo di aver letto il suo numeratore, si pronunzia il nome che compete alla specie della unità frazionaria componente il rotto proposto. Così  $\frac{3}{5}$  si legge *tre quinti*,  $\frac{8}{13}$  *otto decimi terzi* ec.

76. Dall'idea del numeratore, e del denominatore di una frazione (74) seguono evidentemente queste due proposizioni: 1.<sup>a</sup> *Di due rotti aventi lo stesso denominatore quello è più grande, che più grande ha il numeratore*:  $\frac{6}{7}$  per esempio, è più grande di  $\frac{3}{7}$ : 2.<sup>a</sup> *Di due rotti aventi lo stesso numeratore quello è più grande, che ha più piccolo il denominatore*: così  $\frac{5}{7}$  è più grande di  $\frac{5}{9}$ .

77. Si vede chiaramente, che se due rotti abbiano il medesimo denominatore, ma il numeratore di uno di essi, del secondo, per esempio, sia doppio, o triplo, o quadruplo, o ec. del numeratore del primo; il valore del secondo rotto sarà egli pure doppio, o triplo, o quadruplo, o ec. del valore del primo: e viceversa il valore di questo primo sarà per conseguenza sudduplo, o suttriplo, o suquadruplo del valore di quel secondo. Dunque in generale *moltiplicando, o dividendo per un numero qualunque il numeratore di un rotto, e lasciando intatto il suo denominatore, si moltiplicherà, o dividerà per questo medesimo numero il valore del rotto*.

78. Medesimamente, se due rotti abbiano lo stes-



so numeratore, ma il denominatore dell' uno, per esempio, del secondo, sia doppio o triplo, o quadruplo, o ec. del denominatore dell' altro; il valore del secondo rotto sarà sudduplo, o suttriplo, o suquadruplo del valore del primo rotto. Imperocchè, dato un rotto qualunque, se le unità sue frazionarie rendansi due, o tre, o quattro, o ec. volte più piccole, ma se ne prendan sempre tante quante sono le unità frazionarie costituenti il rotto proposto, si avrà un secondo rotto manifestamente sudduplo, o suttriplo, o suquadruplo, o ec. del primo, e avente un denominatore doppio, o triplo, o quadruplo, o ec. di quel di prima (72). Dunque ec. Così  $\frac{2}{6}$  è sudduplo di  $\frac{2}{3}$ , onde  $\frac{2}{3}$  è doppio di  $\frac{2}{6}$ . Da ciò ricavasi, che *Moltiplicando, e dividendo per un numero qualunque il denominatore di un rotto, e lasciandone intatto il numeratore si divide, e si moltiplica per questo medesimo numero il valore del rotto.*

79. Le due precedenti proposizioni dimostrano facilmente, che *Moltiplicando simultaneamente, o simultaneamente dividendo amendue i termini di un rotto per un medesimo numero non cambiassi punto il valore di questo rotto.* Diasi, ad esempio, il rotto  $\frac{8}{12}$ . Moltiplicando per 3 il numeratore 8, ho  $\frac{24}{12}$  rotto che è triplo di  $\frac{8}{12}$  (77), moltiplicando parimenti per 3 il denominatore 12, ho  $\frac{24}{36}$  rotto che è suttriplo di  $\frac{8}{12}$  (n.º prec.). Dunque  $\frac{24}{36}$  è uguale a  $\frac{8}{12}$ . Per simil modo, dividendo per 4 il numeratore 8 del proposto rotto  $\frac{8}{12}$ , ho  $\frac{2}{12}$  rotto suquadruplo di  $\frac{8}{12}$  (77), dividendo pure per 4 il denominatore 12, ho  $\frac{2}{3}$  rotto quadruplo di  $\frac{8}{12}$  (n.º prec.). Dunque  $\frac{2}{3}$  è uguale a  $\frac{8}{12}$ . Dalla presente proposizione deducesi con evidenza, che: *Possono immaginarsi infinite frazioni aventi lo stesso valore,*

*ed espresse in termini differenti.* Premesse queste idee entriamo a spiegare le quattro principali operazioni dell' Aritmetica sui numeri rotti.

### *Addizione dei rotti.*

80. **S**e due, o più rotti abbiano ugal denominatore, siccome sono essi composti di unità frazionarie tutte di una medesima specie, ossia di ugal grandezza; così la somma di que' rotti conterrà in un sol complesso tante di queste unità frazionarie, quante ne sono disgiuntamente in tutti i rotti proposti. Egli è dunque chiaro, che l'addizione di due, o più rotti aventi ugal denominatore consiste nello addizionare i loro numeratori, e sotto la somma di essi scrivere il denominator comune. Così i tre rotti  $\frac{3}{11}$ ,  $\frac{2}{11}$ ,  $\frac{3}{11}$  valgono il rotto  $\frac{8}{11}$ .

81. Ma se due, o più rotti abbiano denominatori differenti, non possono in tale stato addizionarsi, essendo impossibile di formare qualsiasi espressione numerica che sia una, e al tempo stesso composta di ineguali elementi. L'addizione però di questi rotti necessariamente richiede, che si trasformi prima in maniera da acquistar tutti un ugal denominatore, e insieme conservare non alterato il valor primitivo. Ora una siffatta trasformazione si opera con facilità nel modo seguente.

82. Si sa, che un rotto non muta valore se i due suoi termini si moltiplichino per un numero stesso (79). Sian dunque i due rotti  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$ : moltiplicando i due termini del primo rotto per 4 denominatore del secondo rotto, e i due termini di questo secondo per 3 denominatore del primo, avrò  $\frac{8}{12}$ ,  $\frac{9}{12}$  rotti, che oltre l'essere dello stesso



valore dei precedenti, hanno anche denominatori uguali, perchè sono dessi i prodotti di 5 per 4, e di 4 per 5 (38). Dunque per ridur due frazioni al medesimo denominatore bisogna *moltiplicare i due termini di ciascuna pel denominatore dell'altra*. Ma se debban ridursi allo stesso denominator tre frazioni, per esempio,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{7}{9}$  si avrà l'intento riducendo primamente, secondo la regola pur ora scoperta, due qualunque di queste frazioni, come sarebbero le prime due  $\frac{1}{2}$ , e  $\frac{3}{5}$ , il che diventar le farebbe  $\frac{5}{10}$ ,  $\frac{6}{10}$ : indi a ridurre le tre frazioni  $\frac{5}{10}$ ,  $\frac{6}{10}$ ,  $\frac{7}{9}$  si moltiplicherà pel denominator 9 della terza frazione entrambi i termini delle due prime, e pel denominator 10 di una di esse i termini della terza, onde si avranno le tre altre  $\frac{45}{90}$ ,  $\frac{54}{90}$ ,  $\frac{70}{90}$  uguali alle tre primitive  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{7}{9}$ , e necessariamente aventi uno stesso denominatore. Alquanto di riflessione basterà a far comprendere, che le due riduzioni da noi fatte stringer si possono in una, la qual consiste in *moltiplicare amendue i termini di ciascuna delle tre date frazioni pel prodotto de' denominatori dell'altra due*. Parimenti, se si avessero quattro frazioni, si ridurrebbono allo stesso denominatore le prime due: indi le prime due, e la terza: finalmente le prime tre, e la quarta, ovvero si moltiplicherebbono a dirittura amendue i termini di ciascuna delle quattro frazioni pel prodotto dei denominatori delle tre altre: il risultato sarebbe sempre identico. Lo stesso dicasi di un qualunque numero di frazioni. (a) Dunque a ri-

(a) Osservo qui di passaggio, che questa identità può servir a dimostrare, che moltiplicando insieme più numeri, il prodotto rimane costantemente lo stesso qualunque sia l'ordine dei fattori. Diansi infatti più frazioni, si ri-

*dur più frazioni allo stesso denominatore, conviene moltiplicare amendue i termini di ciascuna frazione pel prodotto dei denominatori di tutte l'altra*. Sebbene questa regola sia di un uso generalissimo, pure si incontran dei casi ne quali due, o più frazioni possono ridursi ad un comune denominatore, e insieme esprimersi con numeri più piccoli di quelli che nascerebbono dalla regola soprallegata. Sieno per esempio, le quattro frazioni  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{7}{8}$ : giacchè nelle due frazioni  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{5}{6}$  il denominatore 6 della seconda è doppio del denominator 3 della prima, se moltiplichinsi per 2 i termini di questa prima, si radurranno entrambe allo stesso denominator 6, e si avrà  $\frac{4}{6}$ ,  $\frac{5}{6}$ . Una osservazione analoga sulle due altre frazioni  $\frac{3}{4}$ , e  $\frac{7}{8}$  condurrà a moltiplicare per 2 i termini della prima, cioè di  $\frac{3}{4}$ , il che fatto si avrà  $\frac{6}{8}$ ,  $\frac{7}{8}$ . Dunque le quattro date frazioni  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{7}{8}$  sonosi trasformate nelle quattro altre  $\frac{4}{6}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{6}{8}$ ,  $\frac{7}{8}$  di ugual valore alle prime. Adesso per ridurre queste ultime quattro frazioni al denominatore medesimo, osservo che il denominator 6 delle due prime è uguale a 2 moltiplicato per 3. Dunque amendue questi denominatori hanno un fattore comune che è 2, e però moltiplicando ciascun di loro per il solo fattore non comune avremo un uguale prodotto, perchè manifestamente formato dagli stessi fattori (nota precedente). Si moltiplichin dunque per 4 i termini delle frazioni  $\frac{4}{6}$ ,  $\frac{5}{6}$ ; e per

ducano allo stesso denominatore moltiplicando amendue i termini di ciascuna pel prodotto dei denominatori di tutte l'altra; si troverà che il denominatore acquistato dalle date frazioni dopo la riduzione nasce dal prodotto di tutti i denominatori primitivi moltiplicati insieme con diverso ordine. Ora abbiám veduto sopra, che questo nuovo denominatore debbe necessariamente essere sempre uguale.



3 i termini delle frazioni  $\frac{6}{8}$ ,  $\frac{7}{8}$ , si avranno le quattro  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{2}{4}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{2}{4}$  tutte di ugual denominatore, ed equivalenti alle proposte  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{7}{8}$ . Se la riduzione di queste frazioni al medesimo denominatore si fosse eseguita mediante la regola universale sarebbesi trovato  $\frac{3}{5} \frac{8}{6}$ ,  $\frac{4}{5} \frac{8}{6}$ ,  $\frac{4}{5} \frac{3}{6}$ ,  $\frac{5}{5} \frac{0}{6}$  frazioni espresse in numeri assai più grandi di quelle ottenute col metodo particolare, e però a maneggiarsi più incommode. Alquanto di esercizio nel calcolo insegnerà a porre in opera somiglianti artifici nei casi che li ammettono.

83. La riduzione de' rotti al medesimo denominatore sempre rende possibile l'addizion loro, e però la regola generale per l'addizione dei rotti è la seguente. *Si riducano i dati rotti al medesimo denominatore, indi sotto la somma dei numeratori scrivasi il denominator comune.* Così i rotti  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{5}{3}$  trasformansi nei seguenti  $\frac{2}{6}$ ,  $\frac{4}{6}$ ,  $\frac{10}{6}$  la cui somma è  $\frac{16}{6}$ . Similmente i rotti  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{5}{7}$  ridotti prima allo stesso denominatore, e in seguito addizionati danno  $\frac{22}{105}$ , ossia  $2 \frac{2}{105}$  (73).

84. Ove poi trattisi di addizionare due, o più numeri, ciascun de' quali sia misto d'intero e di rotto: o veramente se alcuno di essi numeri sia intero tuttoquanto, e alcuno tuttoquanto rotto, si prende allora separatamente la somma degli interi, e la somma dei rotti, e questa ponesi alla destra di quella, formando così un numero d'intero misto e di rotto ai proposti numeri equivalente. Di questo modo io trovo a cagion d'esempio, che  $6 \frac{5}{7}$  è la somma di  $4 \frac{2}{3}$  e di  $2 \frac{1}{3}$ : che  $20 \frac{22}{24}$  risulta dall'addizione de' numeri  $3$ ,  $8$ ,  $4 \frac{3}{4}$ ,  $5 \frac{1}{6}$  ec. ec.

### Sottrazione dei rotti.

85. **S**e due rotti abbiano ugual denominatore è chiaro, che si avrà la loro differenza togliendo, dal numero delle unità frazionarie componenti il rotto maggiore, il numero delle unità frazionarie componenti il rotto minore. Dunque per fare in simil caso la sottrazione, *sotto la differenza dei numeratori scrivasi il denominator comune.* Così da  $\frac{4}{7}$  levando  $\frac{3}{7}$  rimane  $\frac{1}{7}$ : da  $\frac{8}{9}$  togliendo  $\frac{4}{9}$  resta  $\frac{4}{9}$ .

86. Siccome poi ogni sottrazione numerica essenzialmente consiste nello spogliamento, che soffre un numero di una, o di più d'una delle sue stesse unità; così egli è palese che sopra due rotti d'inegual denominatore, e però composti di ineguali unità non può operarsi la sottrazione. Dati pertanto due di questi rotti, pria di sottrarli l'uno dall'altro necessario è di ridurli al medesimo denominatore, e per siffatta guisa il presente caso ricondurre al precedente. Quindi ecco la regola per la sottrazione dei rotti: *Si riducano i dati rotti al medesimo denominatore, indi sotto alla differenza dei numeratori scrivasi il denominator comune.* Dati, ad esempio, i rotti  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ : li riduco prima a  $\frac{8}{12}$ ,  $\frac{3}{12}$ : poscia togliendo il minor dal maggiore, trovo per differenza  $\frac{5}{12}$ , così i rotti  $\frac{7}{8}$ ,  $\frac{3}{4}$  si trasformano in  $\frac{7}{8}$ ,  $\frac{6}{8}$ , (82) la cui differenza è  $\frac{1}{8}$  ec. ec.

87. Se abbiansi due numeri misti d'interi e di rotti, di maniera che il rotto, che fa parte del minuendo superi il rotto, che fa parte del minutore, bisogna prendere la differenza degli interi, e a questa congiungere la differenza dei rotti, componendo così un numero misto d'intero e di rotto, che sarà la differenza cercata. Suppongo di avere a togliere  $3 \frac{1}{2}$  da  $4 \frac{3}{4}$ : prendo 1, differenza de-



gli interi, vi unisco  $\frac{2}{8}$ , differenza dei rotti, ed ho  $1 \frac{2}{8}$  differenza cercata. Se poi fosse un intero a levar da un numero d'intero misto e di rotto, accanto alla differenza degli interi si collocherebbe il rotto, che forma parte del minuendo; di questo modo si troverà, che da  $9 \frac{3}{5}$  levando 7 rimane  $2 \frac{3}{5}$ : che da  $19 \frac{2}{11}$  togliendo 8 resta  $11 \frac{2}{11}$  ec. ec.

88. Ma se nei dati numeri, che nuovamente immagino misti d'interi e di rotti, quel rotto che fa parte del minuendo sia minor di quel rotto, che fa parte del minutore; allora perchè prender si possa la differenza dei rotti (n.º preced.), d'uopo è convertire in rotto una unità di quell'intero, che fa parte del minuendo. Si debba, in grazia di esempio, levar  $3 \frac{2}{3}$  da  $6 \frac{1}{4}$ , ossia  $3 \frac{8}{12}$  da  $6 \frac{3}{12}$  (82): siccome  $\frac{8}{12}$  vince  $\frac{3}{12}$ , egli non è possibile di levare il primo rotto dal secondo, se non accrescendo convenientemente questo secondo. Ora a tal fine, io prendo una unità in prestanza dall'intero 6, che fa parte del minuendo  $6 \frac{3}{12}$ , e spezzando in duodecimi la unità prestata, il trasformo in  $5 \frac{12}{12}$ . Fatto questo; trovo subitamente colla regola indicata (n.º preced.), che  $5 \frac{12}{12}$  meno  $3 \frac{8}{12}$  (ossia  $6 \frac{1}{4}$  meno  $3 \frac{2}{3}$ ) è uguale a  $2 \frac{2}{3}$ . L'accennata conversione in rotto di una unità dell'intero ha luogo eziandio allorchè il minuendo sia un numero intero, e il minutore un numero rotto. Così a sottrar  $\frac{2}{3}$  da 4, riduco prima il 4 a  $3 \frac{4}{4}$ , indi trovo, che il residuo è  $3 \frac{2}{3}$ .

#### Moltiplicazione dei rotti.

89. **S**upposto, che il moltiplicando sia rotto, ed il moltiplicatore sia intero è manifesto, che ad avere il prodotto bisogna moltiplicar per l'intero il

numeratore del rotto lasciandone intatto il denominatore (77). Così  $\frac{2}{7}$  moltiplicato per 6 si trova uguale a  $\frac{12}{7}$ , ossia ad  $1 \frac{5}{7}$ .

90. Se poi abbiassi a moltiplicare un rotto per un intero uguale al denominatore di questo rotto, per esempio  $\frac{3}{11}$  per 11, allora operando giusta la regola indicata (n.º preced.), altro non si fa se non ripetere undici volte ciascuna di quelle tre undecime parti della unità principale, che formano il rotto proposto, cosicchè le unità frazionarie si convertono in unità principali; dunque  $\frac{3}{11}$  moltiplicato per 11 è uguale a 3. Col discorso medesimo si proverà, che: *Moltiplicando un rotto qualunque per un numero intero uguale al denominatore di esso rotto, il risultato sarà uguale al suo numeratore*,

91. Sia ora il rotto  $\frac{5}{12}$  a moltiplicar per l'intero 24. Siccome 24 è lo stesso di 12 moltiplicato per 2, così veggo, che il moltiplicatore è qui un multiplo del denominatore del dato rotto, e che il prodotto cercato è uguale a  $\frac{5 \text{ moltiplicato per } 12 \text{ moltiplicato per } 2}{12}$

(89), ossia a  $\frac{10 \text{ moltiplicato per } 12}{12}$ , cioè a 10 (n.º preced.) Si vede che tutto si riduce a moltiplicare 5 numeratore del rotto proposto  $\frac{5}{12}$  per 2 quoziente del moltiplicator 24 diviso per 12 denominatore di esso rotto. Riflettendo anche sol leggermente sulle operazioni fatte in questo articolo, e sulle conseguenze indi dedotte, si vedrà, che esse hanno luogo in tutti i casi analogi. Possiam dunque generalmente conchiudere, che: *Trattandosi di moltiplicare un rotto per un intero multiplo del denominatore di questo rotto, si può divider l'intero pel denominatore, e moltiplicar il numeratore del rotto proposto pel quoziente che ne risulta*. Questa re-



gola serve a trovar l'espressione più semplice del prodotto con minore incomodo, siccome potrà ognuno di per se coll' esercizio sperimentare.

92. Prendo novellamente il rotto  $\frac{5}{12}$ , e voglio moltiplicarlo non più per 24, ma per 2. Questo moltiplicator 2 è summultiplo del denominator 12 del dato rotto, perchè 12 è lo stesso di 2 moltiplicato per 6. Dunque il rotto  $\frac{5}{12}$  può trasformarsi in  $\frac{5}{2 \text{ moltiplicato per } 6}$ : ora, moltiplicando per 2

questo rotto così trasformato, diverrà egli uguale a  $\frac{5 \text{ moltiplicato per } 2}{6 \text{ moltiplicato per } 2}$ . Ma entrambi i termini di quest'

ultimo rotto hanno di necessità 2 per fattor comune; si posson dunque divider per 2 senz'chè mutisi il valore del rotto (79); divido, e trovo così  $\frac{5}{6}$ , che è il prodotto cercato, e in cui il numeratore 5 è uguale a quello del rotto preso a moltiplicando, e il denominator 6 è il quoziente di 12 denominator di esso rotto diviso per 2 numero intero moltiplicatore. Nel modo stesso universalmente si proverà, che: *Dovendosi moltiplicare un rotto per un intero summultiplo del denominatore, basta dividere per questo numero il denominatore del dato rotto, lasciandone illeso il numeratore.* Così avrassi una espressione più semplice di quella che si troverebbe facendo la moltiplicazione a tenor della regola generale (89).

93. Ma se i fattori sieno amendue rotti, onde abbiassi, per esempio,  $\frac{6}{9}$  a moltiplicare per  $\frac{4}{5}$ , allora osservo, che il dato moltiplicator  $\frac{4}{5}$  equivalendo ad  $\frac{1}{5}$  replicato quattro volte; trattasi qui di prendere quattro quinte parti del moltiplicando  $\frac{6}{9}$ . Ora una di tali quinte parti si trova dividendo il rotto  $\frac{6}{9}$  per 5, il che imporra di moltiplicarne per

questo numero il denominatore: formo così il rotto  $\frac{6}{45}$ , che debbo ripetere quattro volte; moltiplico dunque per 4 il numeratore, e di questo modo ho  $\frac{24}{45}$ , prodotto cercato. Si vede, che la operazione consiste in moltiplicare fra loro i numeratori 6, e 4 de' proposti due rotti, e sotto del prodotto 24 scrivere il prodotto 45 dei denominatori 9, e 5. Applicando il precedente raziocinio a tutti i casi possibili, nasce per la moltiplicazione di due rotti la seguente regola: *Sotto il prodotto de' numeratori dei rotti proposti, scrivasi il prodotto de' denominatori.*

94. Segue manifestamente da questa regola, che due rotti qualunque daranno sempre lo stesso prodotto, quand' anche s' inverte l'ordine dei fattori. Così  $\frac{6}{9}$  moltiplicato per  $\frac{4}{5}$  è il medesimo che  $\frac{4}{5}$  moltiplicato per  $\frac{6}{9}$  (38).

95. Egli è pur evidente, che il prodotto di due rotti propri (73) debbe riuscir più piccolo di ciascun fattore. Infatti, se  $\frac{5}{7}$  moltiplicato per 1 dà un prodotto  $\frac{5}{7}$ , moltiplicando  $\frac{5}{7}$  per meno di 1, per  $\frac{3}{4}$ , ad esempio, dee aversi un prodotto minore di  $\frac{5}{7}$ . Lo stesso dicasi di  $\frac{3}{4}$  moltiplicato per  $\frac{5}{7}$ . Di qui s' intende, che la moltiplicazione per un rotto proprio è una real divisione: e quindi il prodotto di due rotti può acconciamente appellarsi *frazion di frazione.*

96. Siano le due frazioni  $\frac{5}{7}$  e  $\frac{7}{8}$ , che abbiano insieme a moltiplicarsi. Seguendo la regola del num.º 93, ma indicando semplicemente i prodotti verrà la seguente espressione  $\frac{5 \text{ moltiplicato per } 7}{7 \text{ moltiplicato per } 8}$ , in cui ben si vede, che tanto il 5 fattor del numeratore, quanto l'8 fattor del denominatore sono moltiplicati per uno stesso numero 7; potranno adun-



que dividersi per 7 ambi i termini di questa espressione, senzachè punto si alteri il suo valore; ma una siffatta divisione riducesi qui a sopprimere il fattor comune 7, il che adempiuto, avrem  $\frac{2}{8}$  a prodotto di  $\frac{2}{7}$  per  $\frac{2}{8}$ . Segue da ciò, che: *Moltiplicando insieme due frazioni tali, che il numeratore dell'una sia lo stesso, che il denominatore dell'altra, si avrà un prodotto uguale all'altro numeratore diviso per l'altro denominatore.*

97. Quello, che di due abbiain detto, può analogamente estendersi a qualunque numero di frazioni. Diansi, per esempio, le quattro frazioni  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{4}{5}$ , che abbiain a moltiplicarsi tutte fra loro. Moltiplicando insieme dapprincipio le prime due frazioni, indi moltiplicando il prodotto per la terza frazione, e il nuovo prodotto per la frazione ultima, e indicando semplicemente i prodotti, risulterà la seguente espressione . . . . .

$$\frac{2 \text{ moltiplicato per } 3 \text{ moltiplicato per } 5 \text{ moltiplicato per } 4}{3 \text{ moltiplicato per } 4 \text{ moltiplicato per } 6 \text{ moltiplicato per } 5}$$

espressione in cui si vede, che il 2 fattor del numeratore, e il 6 fattor del denominatore sono moltiplicati amendue per 3, per 4, e per 5, cioè per 60 (38). Questa espressione adunque è quella stessa, che nascerebbe dall'aver moltiplicato per 60 ambi i termini del rotto  $\frac{2}{8}$ , e però dividendo per 60 ambi i termini della suddetta espressione, ossia i comuni fattori sopprimendo, avrem  $\frac{2}{6}$  a prodotto delle quattro frazioni proposte. Dunque: *Se abbiain a moltiplicar fra di loro due, o più frazioni, egli è bene indicar prima semplicemente i prodotti, che costituiscon i termini della frazion risultante, onde vedere se in questi termini abbiavi un qualche fattor comune, e trovando che siaci, sopprimerlo, ed effettuar poscia la moltiplicazione per*

*que' fattori non comuni, che rimangono.* Di questo modo si arriverà manifestamente ad una più semplice espressione.

98. Medesimamente, se in due rotti proposti a moltiplicarsi, il numeratore dell'uno, per esempio del primo, sia multiplo del denominator del secondo, e il numeratore di questo secondo sia summultiplo del denominator di quel primo, siccome avviene nei rotti  $\frac{16}{21}$ ,  $\frac{3}{4}$ ; allora per giungere ad una più semplice espressione, convien rappresentare ogni multiplo col prodotto di due fattori, l'un de' quali sia il corrispondente summultiplo (questo si otterrà dividendo ciascun multiplo pel suo summultiplo; il quoziente sarà l'un de' fattori, e il summultiplo sarà l'altro fattore): sicchè facendo in seguito la moltiplicazione proposta, e indicando semplicemente i prodotti, si vegga nel rotto risultante quali sieno i fattori comuni ai due soli termini, e quindi possano questi fattori immediatamente sopprimersi. Così nei rotti  $\frac{16}{21}$ ,  $\frac{3}{4}$  accennati qui sopra, divido il numerator 16 del primo rotto per 4 denominator del secondo rotto e summultiplo di 16, e di questo modo scompongo in due fattori il 16, che trasformo per conseguenza in 4 *moltiplicato per 4*. Similmente trasmuto il 21 denominator del primo rotto in 7 *moltiplicato per 3*. Dunque il rotto  $\frac{16}{21}$  si rappresenta con quest'altro  $\frac{4 \text{ moltiplicato per } 4}{7 \text{ moltiplicato per } 3}$ , che moltiplicato in-

dicativamente per  $\frac{3}{4}$ , dà in prodotto l'espressione  $\frac{4 \text{ moltiplicato per } 4 \text{ moltiplicato per } 3}{7 \text{ moltiplicato per } 3 \text{ moltiplicato per } 4}$  la quale, omettendo i fattori comuni, riducesi a  $\frac{4}{7}$ . Serva quest'unico esempio per tutti i casi analogi, e per que' casi tutti, in cui qualche termine di un rotto sia mul-



tiplo, o summultiplo del termine di ufficio diverso, che gli corrisponde nell'altro rotto. L'offrir degli esempj per ogni caso possibile sarebbe un'inutile, e noiosa prolissità. Le presenti regole si applicano eziandio a qualsivoglia numero di rotti.

99. Che se poi il moltiplicando sia un numero intero, e il moltiplicatore un rotto, come ad esempio nel caso che debba moltiplicarsi 7 per  $\frac{2}{3}$ , dico allora così: s'io prenda il terzo di 7, e questo terzo replichi io due volte, avrò senza dubbio il richiesto prodotto. Ora il terzo di 7 è  $\frac{7}{3}$ , rotto, che due volte replicato divien  $\frac{14}{3}$  (89), in cui il numeratore si è il prodotto dell'intero 7 per 2 numeratore del dato rotto  $\frac{2}{3}$ , e il denominatore è 3, vale a dire, il denominatore medesimo di quest'ultimo rotto. Ragionando similmente in tutti i casi di ugual natura si conchiuderà, che: *Moltiplicare un intero per un rotto, bisogna moltiplicare l'intero pel numeratore di questo rotto, e dividere il risultato pel denominatore del rotto medesimo.*

100. Dato, che siano a moltiplicarsi fra loro due numeri d'interi misti e di rotti, si ricondurrà la quistione al caso dell'articolo 93, trasformando ogni cosa in rotto, e facendo in seguito la moltiplicazione. Il trasformare in rotto un numero d'intero misto e di rotto esige, che si divida, e si moltiplichino simultaneamente l'intero pel denominatore del rotto, con che si ha un numero uguale in valore all'intero (90), ma ridotto in forma frazionaria, a cui se il rotto aggiungasi, tutto il proposto numero in un sol rotto verrà trasmutato. Così li due fattori 7  $\frac{2}{3}$ , 5  $\frac{6}{9}$  divengono  $\frac{24}{3}$  più  $\frac{2}{3}$ , e  $\frac{45}{9}$  più  $\frac{6}{9}$ : vale a dire  $\frac{26}{3}$ , e  $\frac{51}{9}$  il cui prodotto è  $\frac{1322}{27}$ , ossia 49  $\frac{14}{27}$ .

101. Se il moltiplicando sia un numero misto

d'intero e di rotto, e il moltiplicatore sia un rotto; trasformerassi allora il fattor misto in un solo rotto, e si farà in seguito la moltiplicazione. Dovendo, per esempio, moltiplicar 8  $\frac{1}{2}$  per  $\frac{2}{3}$ , riduco prima il moltiplicando a  $\frac{16}{2}$ , rotto, che moltiplicato per  $\frac{2}{3}$  dà in prodotto  $\frac{32}{3}$ , ossia 10  $\frac{2}{3}$ . Invertendo poi l'ordine dei proposti fattori verrà il caso di un moltiplicando rotto, e di un moltiplicatore misto, caso nel quale verrà in uso la medesima regola, e conseguentemente il prodotto sarà lo stesso di prima (94). Un ugual metodo ha parimenti luogo, allorchè il moltiplicando sia intero, e il moltiplicatore sia misto. Suppongo, ad esempio, di aver a moltiplicare 23 per 5  $\frac{4}{7}$ : riducendo in un sol rotto il moltiplicatore misto 5  $\frac{4}{7}$ , avrò a moltiplicar 23 per  $\frac{39}{7}$ , e il cercato prodotto sarà  $\frac{907}{7}$ , ossia 128  $\frac{1}{7}$ .

102. Ma se il moltiplicando sia misto, ed il moltiplicatore intero, sebbene possa qui pure la precedente regola impiegarsi, nondimeno egli è più comodo di *Moltiplicar separatamente le due parti del moltiplicando, e insieme congiungendo i due prodotti parziali formare un numero d'intero misto, e di rotto, che sarà il total prodotto richiesto.* Così 15  $\frac{3}{8}$  moltiplicato per 4 dà 60  $\frac{3}{8}$ , ossia 61  $\frac{4}{8}$ . Ove si fosse trasformato in un solo rotto il fattor misto 15  $\frac{3}{8}$ , sarebbe egli divenuto  $\frac{123}{8}$ , e ci avrebbe per conseguenza guidati ad una moltiplicazione alquanto più lunga, ed insieme ad una più lunga divisione per cavar fuori gl'interi nel prodotto contenuti.

#### *Divisioni dei rotti.*

103. **Q**uando si abbia un rotto a dividere per un intero, si troverà il quoziente, *Moltiplicando*



per l'intero il denominatore del rotto (78). Così  $\frac{2}{3}$  diviso per 9 dà per quoziente  $\frac{2}{27}$ . Si vede, che un rotto proprio diviso per un intero non può cambiarsi giammai in improprio.

104. Diasi ora il rotto  $\frac{4}{15}$  a divider per 4, cioè per un intero uguale al numeratore del rotto. Se mi fossero date 4 unità principali a divider per 4, avrei sicuramente per quoto un'unità principale; dunque dandomisi ora in quella vece 4 unità frazionarie a divider per 4, debbo aver necessariamente in quoto un'unità frazionaria della specie stessa di quelle che formano il dividendo proposto. Il quoto adunque di  $\frac{4}{15}$  diviso per 4 sarà  $\frac{1}{15}$ , e si conchiuderà generalmente, che: *Un rotto diviso per un intero uguale al numeratore di questo rotto dà per quoziente l'unità divisa pel denominatore del rotto medesimo.*

105. Suppongo di aver a dividere  $\frac{6}{19}$  per 18. Qui pure trattasi di un dividendo rotto, e di un divisore intero, ma questo divisore è anche multiplo del numeratore del rotto dividendo: infatti 18 è lo stesso di 6 moltiplicato per 3. Dunque facendo la divisione a tenor della regola soprallegata (103), ma indicando semplicemente i prodotti, avremo un quoziente uguale  $\frac{1}{19}$ , la qual espressione (moltiplicando effettivamente fra loro i due fattori 19 e 3 del denominatore, e lasciando indicato il prodotto per l'altro fattore 6) riducesi a  $\frac{6}{19}$ , ossia (dividendo per 6 amendue i termini di questo rotto) ad  $\frac{1}{19}$ , rotto, che esprime il domandato quoziente, e in cui il numeratore si è l'unità, e il denominatore nasce dal prodotto di 19 moltiplicato per 3. Ma 19 è

il denominatore del rotto dividendo, 3 è il quoziente di 18 (divisore proposto) diviso per 6 (numeratore del rotto dividendo), e le operazioni e riflessioni di questo articolo si adattano a tutti i casi analogi; dunque: *A dividere un rotto qualunque per un intero multiplo del numeratore di esso rotto, basta dividere il proposto divisore pel numeratore del rotto dividendo, moltiplicar pel quoziente, che ne deriva, il denominatore di questo rotto, e costituire il risultante prodotto a denominatore dell'unità.*

106. Che se poi il dividendo fosse un rotto, ed il divisore un intero summultiplo del numeratore di questo rotto, come ad esempio, se venisse proposto il rotto,  $\frac{6}{17}$  a divider per 2, allora direi così. Giacchè 6 unità principali divise per 2 danno a quoziente 3 unità principali, egli è indubitato, che 6 unità frazionarie divise per 2 daranno a quoziente 3 unità frazionarie della specie stessa di quelle componenti il rotto dividendo, cioè nell'esempio nostro  $\frac{3}{17}$ . Dunque: *A dividere un rotto qualunque per un intero summultiplo del numeratore di esso rotto, dee dividersi per l'intero il numeratore del rotto, e lasciarne illeso il denominatore.*

107. Ma veniamo al caso in cui trattasi di dividere l'un per l'altro due numeri rotti. Sia, per esempio, il rotto  $\frac{2}{9}$ , che voglia dividersi pel rotto  $\frac{4}{5}$ . Siccome il divisor  $\frac{4}{5}$  è quadruplo di  $\frac{1}{5}$ , così dividendo  $\frac{2}{9}$  sol per  $\frac{1}{5}$  avrei un tal quoto, che saria certamente quattro volte maggiore del richiesto. Dunque, s'io divida  $\frac{2}{9}$  per  $\frac{4}{5}$ , e il quoziente, che se ne cava divida per 4, arriverò al risultato, che si domanda. Ora, a divider  $\frac{2}{9}$  per  $\frac{4}{5}$ , osservo che  $\frac{2}{9}$  diviso per 1 dà per quoziente  $\frac{2}{9}$ , e che però  $\frac{2}{9}$  diviso per  $\frac{1}{5}$  (cioè per un numero cin-



que volte minore di 1 ) debbe dare in quoziente il quintuplo di  $\frac{2}{9}$ , ossia  $\frac{2 \text{ moltiplicato per } 5}{9}$  espressio-

ne, che divisa per 4 diverrà  $\frac{2 \text{ moltiplicato per } 5}{9 \text{ moltiplicato per } 4}$ , vale a dire  $\frac{10}{36}$ , quoziente cercato. Esaminando le operazioni fatte per conoscere questo quoziente si vedrà ch'esse riduconsi 1.º a rovesciar il rotto divisor  $\frac{4}{9}$ , cioè a cambiar l'ufficio ai due suoi termini, talchè il numeratore divenga denominatore, e il denominatore divenga numeratore, così formando il rotto  $\frac{9}{4}$ ; 2.º a moltiplicare per questo rotto  $\frac{9}{4}$  il proposto dividendo  $\frac{2}{9}$ . La dimostrazione si estende a tutti i casi, e di qui nasce per la divisione de' rottii la seguente regola: *Si rovesci il rotto divisore, indi facciasi la moltiplicazione.*

108. Segue lucidamente da questa regola 1.º che: *Il quoziente di due rottii proprij eccede sempre il rotto dividendo.* Infatti rovesciando il divisore rotto, egli di proprio diverrà improprio; dunque maggiore dell'unità principale (73); dunque moltiplicando per esso il rotto dividendo, verrà un prodotto necessariamente maggiore di questo dividendo. Dal che si deduce, la divisione di due rottii proprij essere una real moltiplicazione.

109. 2.º, che: *Ove i due rottii proposti a dividersi abbiano ugual denominatore, si troverà il quoziente speditamente, solchè dividasi il numeratore del rotto dividendo pel numeratore del rotto divisore (97).* Così  $\frac{4}{9}$  diviso per  $\frac{2}{9}$  si troverà uguale a  $\frac{4}{2}$  ossia a 2.

110. 3.º che, dati a dividersi l'un per l'altro due rottii di tal natura, che rovesciando il rotto divisore, nasca un di que' casi nell'articolo 98 accennati, si useranno utilmente gli artificj nello stesso luogo proposti.

111. La divisione di un numero intero per un rotto consiste in *Rovesciare il rotto divisore, e far poscia la moltiplicazione.* Così 35 diviso per  $\frac{2}{12}$  si uguaglia a 35 moltiplicato per  $\frac{12}{2}$ , vale a dire a  $\frac{420}{2}$ , ossia a 60. Questo ricavasi da un raziocinio interamente consimile a quello dell'articolo 107.

112. Se abbian fra loro a dividersi due numeri d'interi misti e di rottii: *Si riduca ciascuno dei dati numeri in un solo rotto, poi facciasi la divisione.* Di questo modo se mi venisse imposto di dividere 5  $\frac{2}{3}$  per 2  $\frac{2}{3}$ , trasformerei prima questi due numeri misti ne' due rottii  $\frac{17}{3}$ ,  $\frac{8}{3}$ ; e dividendo in seguito  $\frac{17}{3}$  per  $\frac{8}{3}$  troverei a quoziente  $\frac{17}{8}$ . Così pure ove in qualche divisione proposta siaci o per dividendo, o per divisore un numero misto, s'incominci sempre dal rendere il misto tuttoquanto rotto, poscia si operi la divisione.

#### *Riduzione dei rottii alla più semplice espressione.*

113. **Q**uanto più è semplice un rotto, vale a dire, quanto più sono piccoli i suoi termini, tanto più merita egli la preferenza. Imperocchè 1.º se debbasi eseguir sopra i rottii alcuna delle quattro operazioni principali dell'Aritmetica, l'operar sopra numeri più piccoli riesce più comodo e più sicuro, che non l'operare su numeri più grandi; 2.º alla maggiore semplicità di un rotto, una più nitida idea corrisponde del suo valore. Diansi, ad esempio, i rottii  $\frac{25}{125}$  ed  $\frac{1}{5}$ , che sono amendue, come il vedremo più sotto, (120) equivalenti. Nel primo di questi rottii bisogna, ch'io concepisca la unità principale spezzata in 125 parti, di cui ne ho a prendere 25, e nel secondo basta, ch'io in-