

66411

LEZIONI ELEMENTARI
D I
GEOMETRIA
E
TRIGONOMETRIA
DEL SIG. D. BERARDINO MORELLI
Nobile Patrizio, e Professore di Mate-
matica nelle Regie Scuole di Lecce.

Dedicato a Sua Eccellenza
F. D. FRANCESCO
MARULLI

Utile Signore della Terra di Grassano, Co-
lonello degli Eserciti di S. M. (D. G.) Di-
rettore, Reg. Delegato, ed Ispettore Gene-
rale de' Porti, e Marine dell' Adriatico, Pre-
side, e Governadore dell' Armi, e Delegato
delle Regie Scuole nella Provincia di Lecce.

TOMO I.

Che contiene la dottrina delle
PROPORZIONI, E LA LONGIMETRIA:

ad  uso di  Michele  Gattini

IN LECCE MDCCXCVI.

Presso Vincenzo Marino, e Fratelli.

Con Licenza de Superiori.

Matera il Di 12 Settembre 1814



GATTINI
T
234

EDIZIONE
DONO L
NICOLA E NICOLETTA GATTINI

P R E F A Z I O N E

Nulla di nuovo s' incontrerà in queste lezioni elementari di Geometria; giacchè le verità di siffatta Scienza sono le medesime presso tutti ed immutabili. Ciò, che rimane alla sola libertà del Geometra, che le aduna insieme per farne un corpo di scienza, si riduce all' ordine, con cui le concatena, e alla maniera, colla quale le dimostra. L' ordine, o distribuzione delle presenti lezioni è tale, che nella prima parte vi si troveran di unita tutte quelle verità, che riguardano le Linee; nella seconda quelle, che sono proprie delle Superficie; e nella terza quelle, che appartengon ai Solidi: ciascuna però di queste parti si vedrà suddivisa in altrettanti capi, quanti sono i diversi aspetti, o circostanze, da cui l' oggetto, che ella tratta, può essere commodamente ravvisato. Riguardo poi alla maniera di dimostrare sonosi prescelte sempre le dimostrazioni le più semplici, e d' una più facile intelligenza; e chiunque avrà la voglia di scorrere con qualche grado di attenzione, e tutte di seguito queste lezioni, sia pur sicuro, che si porrà nello stato di apprendere da se solo, per dir così, e senza guida di Maestro, la Geometria.

DOTTRINA

DOTTRINA GENERALE

DELLE

RAGIONI, E PROPORZIONI

LA *Quantità* è il general oggetto di tutte le scienze Matematiche; e chiamasi *Quanto* tutto ciò, che si può accrescere, o diminuire, come sono per esempio i numeri, l'estensione, la luce, il moto &c. Fra le scienze matematiche si distingue molto la Geometria, che giustamente può essere riguardata, come la base, ed il fondamento di tutte le altre. Ella ha per suo particolare oggetto l'estensione continua, di cui ne considera le proprietà, e i rapporti in tutte le tre dimensioni, che in quella si distinguono, e che sono la Lunghezza, la Larghezza, e la Profondità. Ma siccome molte di queste proprietà, e rapporti non si potrebbero concepire senza una preventiva conoscenza di alcune Ragioni, e Proporzioni, che hanno generalmente luogo fra tutti i generi di quantità: così per non interrompere nella prima parte delle nostre lezioni elementari di Geometria il corso delle verità, che riguardano le linee, abbiam creduto opportuno far loro precedere la general dottrina di tutte quelle Ragioni, e Proporzioni, che come proprie d'ogni genere di quantità

quantità possono avverarsi ancora delle particolari grandezze, che considera la Geometria.

Questa general dottrina delle Ragioni, e Proporzioni, che or esporremo, potrà essere studiata o pria di dar cominciamento alle lezioni della Geometria, o, se ancora piace, contemporaneamente con i primi nove capi della prima parte della medesima; essendo solamente necessario farla precedere al capo decimo della stessa prima parte, senza di cui nè quel capo, nè quant'altro segue in tutta la Geometria si potrebbe capire. La dottrina poi, di cui or tratteremo, sebene sia da noi illustrata con esempj soltanto numerici, ciò non ostante può ella applicarsi a tutti gli altri generi di grandezze; e ciò si avverta una volta per sempre.

DEFINIZIONE I.

(1) Ogni grandezza minore si chiama *parte* d'una maggiore dello stesso genere, e la maggiore si dice *multiplice* della minore. La minore poi prende il nome di *parte aliquota* della maggiore, quando la misura esattamente, e senza resto; ma si dice *parte aliquanta* della stessa maggiore, quando vi si contiene un certo numero di volte con qualche resto; e lo stesso intendasi de' multipli. Così il 3 è parte aliquota di 9, ed aliquanta di 10; e l'9 è multiplice aliquoto di 3.

(6)
di 3, ed aliquanto di 2.

DEFINIZIONE II.

(2) Può darsi bene il caso, che una qualche parte aliquota d'una grandezza minore, sia pure parte aliquota d'un'altra maggior grandezza, com'è per esempio il 2 in riguardo del 6, e del 10. Avvenendo ciò, la parte, che misura esattamente) sebbene con differenti numeri di volte) ciascuna delle dissuguali due grandezze, si chiama la *commune lor aliquota*; e le due grandezze, che han finita, ed assegnabile qu'alche commune lor aliquota, diconsi grandezze *commensurabili*; come al contrario si chiamano *incommensurabili* quelle due grandezze, che ne son di senza, o che almen, se l'hanno, non la possono avere, che infinitamente piccola, ed inassegnabile; giacchè allora una data parte dell'una non si può mai precisamente conoscere qual parte sia dell'altra.

DEFINIZIONE III.

(3) Quando due grandezze minori misurano esattamente, e uno stesso numero di volte due maggiori; alle minori si dà il nome di *parti aliquote simili* delle maggiori, e queste diconsi *multiplici, o multipli simili* delle minori: tali sono il 3, e l'4 relativamente al 9, e al 12, ed al reciproco. Ma quando non

(7)

già le due grandezze minori, bensì alcune stesse loro parti, per esempio le loro metà, le loro parti terze, o quarte, o quinte &c. sono quelle, che misurano esattamente, e uno stesso numero di volte le due maggiori; allora le minori chiamansi semplicemente *parti simili* delle maggiori, e pur esse in questo secondo caso si vengono a contenere uno stesso numero di volte nelle due maggiori, a cui si riferiscono; poichè dovendosi ogni grandezza comporre da 2 metà, da 3 terzi, da 4 quarti, da 5 quinti &c., è manifesto, che sempre che le metà, i terzi, i quarti, o altre stesse parti di due grandezze minori contengonsi uno stesso numero di volte in due maggiori, ancora un egual numero di volte vi si vadano a contenere le stesse due minori grandezze.

Perciò in generale son parti simili di due grandezze tutte quelle, che vi si contengono del modo stesso, o sia un' egual numero di volte; e multipli simili sono quei, che contengono le grandezze minori del modo stesso, cioè uno stesso numero di volte. Così 6 ed 8 son parti simili di 9, e 12, perchè vi si contengono una volta, e mezza tutte due; e perciò le loro metà misurano tre volte con precisione le grandezze maggiori; al contrario 9, e 12 son multipli simili

di 6

di 6, e di 8, perchè contengono con precisione tre volte le loro metà.

DEFINIZIONE IV.

(4) Si chiama *Ragione Geometrica* il paragone, che si fa di due grandezze d' una stessa specie intorno la loro quantità, per osservare quante volte l' una contenga l' altra, o qual parte l' una sia dell' altra. Le due grandezze, che si comparano, diconsi in generale i *termini* della ragione; ma in particolare, si chiama *antecedente* quella, che si paragona, e *conseguente* quella, a cui si paragona. Una ragione dicesi di *maggior inegualità* sempre che l' antecedente sia più grande del conseguente; di *egualità*, quando i due termini sono eguali; di *minor inegualità* ogni qualvolta l' antecedente è più piccolo del conseguente. Si dà poi ad intendere la *Ragione Geometrica*, ponendo due punti tra un termine e l' altro; così se io trovo scritto $A : B$, o para io: 2, leggerò sempre la ragione di A a B, ovvero quella di io a 2, dando alli due punti il valore del segnacaso del dativo.

DEFINIZIONE V.

(5) Per conoscere dunque il valore d' una *Ragione Geometrica*, converrà sempre divider un suo termine

per l' altro, che così si palesano le quante volte l' uno contiene l' altro. Or il quoziente di sì fatta divisione si chiama l' *esponente* della ragione, perchè esso ne determina la grandezza, e sovente ancora le dà il nome, di modo che dove quest' esponente sia 2, 3, 4 &c., la ragione, a cui compete, si dice *ragione dupla, tripla, quadrupla* &c.; dove al contrario l' esponente è un secondo, un terzo, un quarto, la ragione si chiama *suddupla, suttripla, sucquadrupla* &c.; e dov' esso è uno e un secondo, uno e un terzo, uno e un quarto &c. la ragione si denomina *sesquialtera, sesquiterza, sesquiquarta* &c.

Nel divider i due termini della ragione, sarebbe indifferente scegliere qualunque vogliasi delli due per dividendo, e considerare l' altro come il divisore: ma pur i Geometri costumano quasi sempre dividere l' antecedente pel conseguente, come da ora in avanti lo praticheremo ancora noi. Nasce da ciò, che l' esponente d' una ragione di maggior inegualità esser debba sempre un numero più grande dell' unità; ed esso è quello, che denota le quante volte l' antecedente contiene il conseguente: nelle ragioni di egualità l' esponente è sempre eguale all' unità (giacchè ogni grandezza contiene una volta se stessa, o la sua eguale); ma

ragioni di minore inegualità l' esponente dovrà essere costantemente un numero più piccolo dell' unità, o sia un rotto vero, il quale poi non esprime quante volte l' antecedente contiene il conseguente, ma qual parte ne sia. Per esempio l' esponente della ragione di $10:2$ è 5, perchè il 10 contiene 5 volte il 2; ma della ragione di $2:10$ l' esponente è due decime, o sia un quinto, perchè il 2 non è che la quinta parte del 10. Non bisogna dunque confondere la ragione di $10:2$ con la sua inversa di $2:10$, giacchè i lor esponenti ne danno una valutazione ben diversa. In generale l' esponente d' una qualsivoglia ragion geometrica può sempre ancora esprimersi con un rotto, che abbia per suo numeratore l' antecedente, e per denominatore il conseguente di quella stessa Ragione; poichè ogni rotto esprime di sua natura una divisione del numeratore pel denominatore, e quando tal divisione è praticabile, si ricaderà sempre ne' medesimi casi di prima. Così della ragione di $10:2$ l' esponente potrà pur dirsi, che sia dieci duesimi, eguale a 5, e della ragione di $B:B$ che sia B diviso per B eguale ad uno. &c.

RAGIONE

RAGIONI GEOMETRICHE EGUALI.

DEFINIZIONE VI.

(6) Diconsi *Ragioni Eguali* quelle, che hanno esponenti eguali, non ostante che le due grandezze, che formano l' una, siano maggiori delle due grandezze, che fanno l' altra; poichè la valutazione d' una ragion geometrica non dipende affatto dalla grandezza assoluta de' due termini, che la compongono; bensì dal modo con cui l' uno l' altro si contengono, cioè dal numero delle volte, che l' uno contiene l' altro; e può darsi bene il caso, che due grandezze piccole si contengan l' una l' altra di quel modo stesso, con cui contengonsi pur l' una l' altra, due grandezze maggiori. La ragione dunque di $100:50$ si dice eguale a quella di $12:6$, o pur di $10:5$, o di $8:4$, o di $2:1$, perchè tutte queste ragioni han lo stesso esponente 2, e sono tutte duple. Per simile motivo diconsi ancora ragioni eguali quelle di $5:15$ di $3:9$, di $1:3$, di un terzo ad uno &c., perchè di tutte queste l' esponente è un terzo. Dalla data definizione gonsi tutte le seguenti verità.

B 2

(7) I. Che una ragion geometrica è sempre eguale a quella del suo esponente all' unità: poichè è natura della divisione, che il dividendo contenga, o si coten- ga, tante volte nel divisore, quante il quoto contiene, o contiensi nell' unità; ed è noto, che in ogni Ragion geometrica l' antecedente fa le veci di dividendo, il conseguente di divisore, e l' esponente del quoto di si fatta divisione (5).

(8) II. Due ragioni, che sono eguali a una terza ragione, debbono esser anche tra loro eguali; giacchè le due ragioni non avrebber potuto mai eguagliar la stessa terza, senza che i lor esponenti non fossero stati tutti due eguali a quel della terza; e però gli es-ponenti di quelle due Ragioni son' eziandio tra loro eguali (ass. 2.), e quindi le ragioni stesse.

(9) III. Due Grandezze eguali paragonate a una terza qualsivoglia, le diranno egual ragione; e la terza paragonata alle due le dirà pure ragioni eguali: poichè ciascuna delle due grandezze eguali contiene, o si contiene lo stesso numero di volte in quella terza, ed al contrario.

(10) IV. Dunque reciprocamente debbono esse- re tra loro eguali quelle due grandezze, che parago- nate a una stessa terza, le dicono una ragion medesi-
ma;

ma; o alle quali dica quella terza ragioni eguali, giacchè senza di questa condizione le due Ragioni e- guali non si sarebbero giammai avute.

(11) V. Quando le due Grandezze d' una ra- gion geometrica si dividono tutte due per uno stesso numero, e però se ne prendono *parti simili*; la ra- gione de' due quozienti, o sia delle loro simili parti, sarà la medesima d' quella, che hanno le due grandez- ze. Sian A, e B le due grandezze, e sia C il lor commune divisore; è certo, che supponendo A dop- pio di B, e però eguale a due B, il quoto della divisio- ne di due B per C, dovrà esser doppio di quello, che nasce dalla divisione di un solo B per C. Sarebbe ancora il primo triplo, quadruplo, quintuplo &c. del secondo, ogniqualvolta si supponesse A triplo, quatruplo, quintuplo &c. di B. Dunque in generale la ragione delle due parti simili, che risultano dalla supposta divisione, val quanto quella delle due grandezze.

(12) VI. Che se le due grandezze in vece di dividerle, si moltiplicano tutte due per uno stesso nu- mero; i due prodotti, o sian i due *moltiplici simili*, che si generano con questa moltiplica, avran pure la ragione medesima delle due grandezze: perchè se in que- sto caso consideriamo i prodotti come grandezze, e le
grandezze

grandezze come due loro simili parti , si è già visto, che la Ragione de' primi val quanto quella delle seconde , nel numero precedente .

(13) VII. Se alle due grandezze d' una ragione vi si aggiungono loro simili parti , o simili parti ancora se ne tolgono ; la ragione delle due somme , o de' due resti , valerà eziandio quanto quella delle grandezze . Figuriamo , che a ciascuna delle due grandezze si aggiunga di più la sua terza parte , o pur che questa terza parte se ne detragga . Dunque nel primo caso ciascuna delle due provenienti somme conterrà la propria grandezza una volta , e un terzo ; e nel secondo caso ciascun de' due resti sarà le due terze parti della propria grandezza ; ch' è quanto dire , nel primo caso le somme son *multipli simili* delle supposte due grandezze , e nel caso secondo i resti ne son *simili parti* . Sicchè in vigor delle precedenti verità , sì nell' uno , che nell' altro caso tanto dovrà valere la Ragione delle due grandezze quanto quella dell' indicate somme , o resti .

(14) VIII. Finalmente in due ragioni eguali , le parti simili de' conseguenti debbon esser sempre parti simili ancora de' due rispettivi antecedenti ; perchè se gli antecedenti non le contenessero uno stesso numero di volte , non potrebbe poi ciascun de' due an-

tecedenti contener uno stesso numero di volte il conseguente suo , lo che ripugna alla supposizione . Dunque al reciproco sempre che di due ragioni avverasi , che le parti simili de' conseguenti lo son pure degli antecedenti , le due ragioni saranno eguali : infatti allora ciascuno de' due antecedenti contenendo uno stesso numero di volte la simil parte del conseguente suo , verrà pur a contenere uno stesso numero di volte il conseguente medesimo . Ed ecco in ciò un criterio , o sia carattere da poter conoscere l' egualità di due ragioni .

DEFINIZIONE VII.

(15) Due ragioni geometriche si dicono *dirette* , o *direttamente eguali* , ogniquale volta l' antecedente di una contiene , o si contiene nel proprio conseguente tante volte , quante ancora l' antecedente dell' altra contiene , o si contiene , nel conseguente suo ; tali sono le due ragioni di $15 : 3$, e di $5 : 1$. Ma due Ragioni si chiamano *reciproche* , o *eguali reciprocamente* , se l' antecedente di una contiene , o si contiene nel suo conseguente , tante volte , quante al contrario il conseguente dell' altra contiene , o si contiene nel suo an-

ecedente : sono tali queste due ragioni di 6 : 3 , e di 2 : 4 ; ed è chiaro , che le stesse si muterebbero in dirette , tosto che in una si cangiassero di luogo i due termini , che la fanno ; giacchè la ragion di 6 : 3 è direttamente eguale a quella di 4 : 2 , ovvero la ragione di 3 : 6 a quella di 2 : 4 .

PROPORZIONE GEOMETRICA.

DEFINIZIONE VIII.

(16) Chiamasi *proporzione geometrica* l' egualità di due ragioni geometriche , e le quattro grandezze delle due ragioni prendono allora il nome di *grandezze proporzionali* , dicendosi di esse , che sta la prima alla seconda , come la terza sta alla quarta : cioè che la prima si contiene , o contiene sempre la seconda , quello stesso numero di volte , che la terza si contiene , o contien la quarta . Per indicar la proporzione , si mettono quattro punti (o pur il segno dell' egualità) tra le due ragioni eguali da cui risulta , di questa maniera , $16 : 4 :: 8 : 2$, e si leggerà sempre , sta 16 a 4 , come 8 sta a 2 . I due antecedenti della proporzione si dicon termini tra loro *omologhi* ed *omologhi* sono ancor tra loro i due conseguenti ;

ma ris

ma riguardo alla prima ragione si dice sempre *antecedente primo* , e *conseguente primo* ; e riguardo alla seconda , *antecedente secondo* , e *conseguente secondo* .

Il primo , e quarto termine della proporzione se ne dicono gli *estremi* ; il secondo poi , e il terzo si chiaman i *medij* ; ed ogni proporzione , in cui il secondo termine è diverso dal terzo , come nel recato esempio , prende il nome di *proporzione discreta* ; ma quando avviene , che il secondo termine sia eguale al terzo , se le dà il nome di *proporzione continua* : tal' è questa , $12 : 6 :: 6 : 3$, perchè dove termina la prima ragione , ivi , o sia da quello stesso termine , comincia la seconda . Dunque la proporzione continua si restringe a tre sole grandezze diverse ; ma in sostanza sono sempre quattro , perchè la seconda fa due veci , cioè di conseguente per la prima ragione , e di antecedente per la seconda ; e questo termine secondo vien chiamato il *quello proporzionale* , o pur semplicemente il *medio* .

(17) Nasce da questa definizione II. che in una proporzion geometrica due termini omologhi sono sempre parti simili degli altri due pur omologhi ; cioè o li due conseguenti lo sono de' due antecedenti (quando la proporzione è formata da due ragioni

di qua-

di maggior inegualità), o gli due antecedenti lo sono de' conseguenti (se le due ragioni della proporzione sono di minor inegualità).

(18) II. Nasce ancora, che due grandezze sono sempre in proporzione con due loro simili partiti, o con due loro multipli simili; come altresì colle somme, o co' resti, che risultano, aggiungendo o parti simili alle due grandezze, o pur togliendone parti simili; e ciò in virtù de' numeri 11, 12, 13.

(19) Col lume di queste due conseguenze si può adesso dimostrare, che da quattro grandezze proporzionali non si vada punto a togliere la proporzione, che hanno, I. se si *permutano* (o alternano), cioè si paragona la prima alla terza, e la seconda alla quarta; e però si fan cangiare trà lor di sito le due medie; II. se s' *invertano*, cioè in ciascuna delle due ragioni si paragona il conseguente al proprio antecedente, e però si fan divenire medie le due grandezze estreme, ed estreme le due medie; III. se si *compongono*, cioè in ciascheduna delle due ragioni la somma di antecedente, e conseguente si paragona al conseguente, o pure all' antecedente; IV. se si *dividono*, cioè in ciascuna ancora delle due ragioni

ragioni la differenza de' due termini, che la fanno, si paragona al conseguente, o pure all' antecedente.

(20) Ed in effetti dacchè nella proporzione geometrica due termini omologhi son parti simili degli altri due (17.): dunque in essa tanto val la ragione di primo a secondo antecedente, quanto quella di primo a secondo conseguente (11.), e però le due eguali ragioni, che formavano la proporzione si conservano tutta via eguali, non ostante che la terza delle quattro grandezze proporzionali si faccia passare nel secondo luogo, e la seconda nel terzo.

(21) Essendo in oltre in una proporzione ciascun de' due conseguenti o la stessa parte del proprio antecedente, o uno stesso multiplo del medesimo: è chiaro ancora, che tanto valer debba la ragione di primo conseguente a primo antecedente, quanto quella del conseguente secondo all' antecedente secondo (16.). Locchè dimostra la verità dell' inversione.

(22) Di vantaggio, allorchè a ciascuno de' due antecedenti d' una proporzione si aggiunge il conseguente proprio, si vengon ad accrescere gli anteceden-

cedenti di due simili loro parti; ed altresì di simili loro parti resterebbero diminuiti, qualora da ciascuno si volesse torre il proprio conseguente (17.) . E dunque sì nell' uno, che nell' altro caso le somme, o resti saranno in proporzione (18.) con i semplici antecedenti, ovvero con i conseguenti (perchè la ragion di questi non differisce dalla ragion di quelli) e però sarà somma; o resto primo; a somma, o resto secondo, come antecedente primo, ad antecedente secondo, o pure come conseguente primo a conseguente secondo: sicchè poi permutando le grandezze di questa proporzione, si troverà stare somma prima, o resto primo, ad antecedente primo (ovvero a conseguente primo), come somma, o resto secondo, ad antecedente secondo (ovvero a conseguente secondo) . Col che rimane verificata la verità della composizione, e della divisione . .

(23) Sono utilissimi nella Geometria questi cangiamenti, che si fanno in una proporzione, chiamati da Geometri *trasformazioni*; poichè col loro mezzo si passa da proporzione in proporzione, e talvolta si può cadere in quella, ch' erasi proposto di stabilire. Vero è, che in ciascuna di queste trasformazioni si mutan gli esponenti delle due ragioni, che

che facevano la prima proporzione; ma ciò non impedisce, che nelle grandezze trasformate non vi resti la proporzione ancora; perchè gli esponenti delle due ragioni cangiano tutti due del pari, quanto basta per istabilire la proporzione (16) . Ecco per tanto un general esempio, sul quale, a colpo d' occhio, si può vedere la verità delle predette quattro trasformazioni .

Sia la data proporzione

$$10 : 2 :: 5 : 1$$

Sarà I. permutando $10 : 5 :: 2 : 1$

II. invertendo $2 : 10 :: 1 : 5$

III. componendo $12 : 2 :: 6 : 1$

o pure $12 : 10 :: 6 : 5$

IV. dividendo $8 : 2 :: 4 : 1$

o pure $8 : 10 :: 4 : 5$

Ciò che si è fin' ora dimostrato intorno le proporzioni, ci pone agevolmente nello stato di poterne detivar ancora quest' altre loro proprietà .

(24) I. In due ragioni eguali (o sia in una proporzione) la somma, o la differenza de' due antecedenti sta sempre alla somma, o alla differenza de' due conseguenti, come in una delle ragioni date sta
l' ante-

l' antecedente al conseguente suo.

Sian le ragioni eguali quelle di $15 : 3$
e di $5 : 1$

sarà ancora $20 : 4 :: 5 : 1$

e $10 : 2 :: 5 : 1$

Poichè essendosi osservato (18), che due grandezze sono in proporzione con due loro simili parti, divien chiaro, che nella proporzione geometrica una delle due ragioni, (e propriamente quella, che è concepita in termini minori) non possa avere per sue grandezze che parti simili di quelle, che forman l' altra. Dunque aggiungendo antecedente ad antecedente, e conseguente a conseguente, o pur togliendo l' un dall' altro antecedente, e l' ug dall' altro conseguente: nel primo caso si producon multipli simili, e nel secondo parti simili delle due grandezze, che contengono una delle ragioni date; e perciò sì le somme, che gli avanzi, che risultano non possono tra lor avere una ragion diversa da quella, che regna tra l' antecedente e l' conseguente d' una delle ragioni date (13), e sia qualunque vogliasi delle due, poichè le due ragioni sonosi supposte tra lor eguali.

(25) Dunque in due ragioni eguali sarà ancor la somma de' due antecedenti alla somma de' due conseguenti, come la differenza de' primi è alla differenza de' secondi, perchè ciascuna di queste due ragioni si è dimostrata eguale a una stessa ragione terza, cioè a una delle due ragioni date; e però dovranno pur essere tra lor eguali. (8)

(26) Permutandole adunque sarà di vantaggio la somma alla differenza degli antecedenti di quelle due ragioni eguali, come la somma alla differenza de' conseguenti delle medesime.

(27) II. Anche date molte ragioni eguali, come son per esempio quelle di $6 : 3$

di $8 : 4$

di $10 : 5$

di $2 : 1$ &c.

$26 : 13$

la somma 26 di tutti gli antecedenti sarà alla somma 13 di tutti i conseguenti, come in una delle ragioni date sta l' antecedente al conseguente suo. Poichè unendo insieme gli antecedenti, e insieme pure i conseguenti delle due prime di quelle ragioni, si è già visto (24) che il novello rapporto, che nasce
sia

sia del valore stesso d' uno de' due primi, e poi dello stesso valore ancora, che ha la terza ragione data (giacchè le ragioni date sono tutte di egual valore per supposizione).

Unendo dunque alle due grandezze di quel novello rapporto i due rispettivi termini di questa ragione terza, si formerà di necessità un' altro novello rapporto dello stesso valore ancora di quella ragione terza (24), o di qualunque altra delle date, e così di mano in mano. Or l' antecedente dell' ultimo di quei novelli rapporti, che formansi di questo modo, non è, che la somma di tutti gli antecedenti delle date ragioni, e l' conseguente dello stesso ultimo rapporto contiene pur la somma di tutt' i conseguenti delle medesime. Dunque date molte ragioni eguali &c.

(28) III. Sempre che si hanno due proporzioni di condizione tale, che in tutte due siano tra lor eguali sì li due primi, che i due secondi antecedenti, come son per esempio le due, che seguono

$$18 : 6 :: 12 : 4,$$

$$18 : 3 :: 12 : 2,$$

il primo antecedente comune 18 sarà alla somma de' due primi conseguenti 6, e 3, come il secondo co-

mune

comune antecedente 12 è alla somma de' due secondi conseguenti 4, e 2 (cioè $18 : 9 :: 12 : 6$). Giacchè in tal caso i conseguenti d' ognuna delle due proporzioni essendo parti simili de' rispettivi lor comuni antecedenti, la somma pure de' due primi conseguenti, e quella de' due secondi, risulteranno di necessità o parti simili di quei comuni antecedenti, o grandezze a quelli eguali, o infine multipli simili de' medesimi: e però in qualsivoglia di questi casi sarà sempre il primo antecedente comune al secondo comune antecedente, come i due primi conseguenti insieme a i due conseguenti secondi pur insieme: e poi permutando dovrà essere il primo comune antecedente alla somma de' primi due conseguenti, come il secondo comune antecedente è alla somma de' due secondi conseguenti. Anzi se i comuni termini delle proporzioni non sono già gli antecedenti, ma i conseguenti, collo stesso argomento si dimostra ancora essere la somma de' due primi antecedenti al primo lor comune conseguente, come la somma de' secondi due antecedenti è al secondo lor comune conseguente.

(29) IV. Finalmente è proprio d' ogni proporzione geometrica l' aver il prodotto delle due

Tom. I.

D

grande-

grandezze estreme, eguale a quello delle due medie. Per esempio nella proporzione $10 : 5 :: 8 : 4$, tanto vale il prodotto di 10 per 4, quanto quello di 5 per 8.

Per convincersi di questa verità in generale basta riflettere, che in una ragione geometrica tanto vale il solo antecedente, quanto il conseguente moltiplicato per l'esponente della ragione; poichè tal esponente si determina (5) dividendo l'antecedente pel conseguente, ed è natura della divisione, che il solo dividendo valer debba, quanto il prodotto del quoziente pel divisore. Surrogando dunque ai due antecedenti della proporzione i prodotti de' loro conseguenti per gli esponenti delle rispettive due ragioni, rendesi manifesto, che la moltiplicazione delle due grandezze estreme si risolve in quella dell'esponente della prima ragione per entrambi i conseguenti, e la moltiplicazione delle due medie si riduce a quella dell'esponente della ragione seconda pe' conseguenti ancora delle due ragioni. Or gli esponenti di queste due ragioni sono tra lor eguali per la natura della proporzione (16), ed i conseguenti son i medesimi in tutte due le moltipliche. Dunque di necessità il prodotto degli estremi risulterà eguale al prodotto de' medii

medii: giacchè ciascuno di questi due prodotti è generato da medesimi tre fattori.

(30) Quando dunque la proporzione è continua, il prodotto del primo, e del terzo termine sarà eguale al quadrato del medio; poichè allora dovrebbero moltiplicar questo medio per lo stesso medio, ed ogni prodotto, che si genera da una grandezza moltiplicata per se stessa, prende il nome di quadrato.

(31) Si deduce in tanto dalla recata dimostrazione, che gli espressi due prodotti non sarebbero già mai risultati eguali, qualora l'esponente della prima ragione non fusse stato eguale a quel della seconda. Dunque ogni qualvolta di quattro grandezze qualunque avverasi, che il prodotto delle due estreme raggiugli quello delle due medie, certo è, che nell'ordine, in cui sono, debbono far una proporzione discreta; e se in tre succede, che il prodotto della prima, e della terza si compensi col quadrato della seconda, non può essere ancor di meno, che quelle tre grandezze non formino una proporzione continua. Ed ecco in ciò un'altra marca da poter conoscere l'eguaglianza di due ragioni, o sia la proporzione.

(32) La dimostrata verità ci pone nello stato di poter risolvere la regola del tre, chiamata dagli

Ar. metici *Regola aurea*, col mezzo della quale dopo tre grandezze date si determina la quarta in proporzione. Ecco qual è di questa regola il fondamento. Poichè le 3 grandezze date di unita colla quarta, che si v'è cercando, debbon fare una proporzione, di cui la seconda, e la terza ne sian i medj, e la prima con la quarta, (che ancor s' ignora) ne divengono gli estremi; certo è, che se io moltiplico la seconda per la terza, il lor prodotto lo potrò riguardare come quello ancora della prima, e della quarta, a cui equivale, suppostavi la proporzione. Divido dunque un tal prodotto per la prima delle grandezze date, che è uno de' suoi fattori, e nel quoziente (per la natura della divisione) troverò sicuramente l' altro, che lo produce di necessità. Quel quoziente dunque sarà la quarta grandezza in proporzione colle tre date. Vuolsi per esempio la quarta proporzionale dopo 3, 7, e 9. Si moltiplichino 7 per 9, e 'l prodotto 63 dividasi per 3, il quoziente 21 sarà quella quarta, che si v'è cercando, e in effetti $3 : 7 :: 9 : 21$.

(33) Ma quando dopo due grandezze date si volesse la terza in proporzione continua, bisognerebbe far il quadrato della seconda, e dividerlo per la prima,

(34) Ed allorchè tra due grandezze date si cerca di stabilirvi una media proporzionale, vuopo è moltiplicar insieme quelle due grandezze, e poi riguardando siffatto prodotto, come se fusse il quadrato della media, che si v'è cercando, estrarne la radice quadrata, che sarà la media desiderata. (Chiamasi radice quadrata d' un numero, quell' altro, che lo genera colla moltiplicazione di se stesso; così il 4 è la radice quadrata del 16, perchè 4 via 4 produce 16. &c.)

(35) Pria di passar innanzi, convien riflettere, che alla proporzione si dà talvolta l' aggiunto di *reciproca*, ed è quella, che ha luogo in due ragioni reciprocamente eguali (15). Ma siccome le quattro grandezze delle due ragioni di simil fatta non fan mai una proporzione nell' ordine, in cui trovansi collocate, e per aversi la proporzione è necessario, che s' invertan i termini d' una delle due: così la proporzione reciproca può definirsi per quella, in cui i luoghi estremi son occupati dalle due grandezze, che si paragonano, e i luoghi medj dalle altre due, a cui fansi i paragoni, o al contrario. Di fatti se nel paragonare le due quantità A, e B alle altre due X, e Y, avviene il caso, che la ragione di A : X sia

sia reciprocamente eguale a quella di $B : Y$, per cavare una proporzione da siffatte due ragioni, bisognerà assolutamente dire $A : X :: Y : B$, ovvero $X : A :: B : Y$, ove si fa chiaro che gli antecedenti A e B divengon o tutti due estremi, o tutti due medj della proporzione, ed altrettanto succede ancora de' conseguenti X ed Y ; laddove se le due ragioni fossero state *direttamente* eguali, i luoghi estremi della proporzione resterebbero occupati sempre da un termine della prima ragione, e da un termine della seconda (avvenendo lo stesso de' luoghi medj); ed allor è il caso, che la proporzione chiamerebbesi *diretta*, e le quattro grandezze *direttamente proporzionali*.

RAGIONI GEOMETRICHE INEQUALI.

(36) Chiamansi *ragioni disuguali* quelle, che hanno esponenti disuguali, e di due ragioni disuguali la maggiore è sempre quella, che ha maggiore l' esponente. Così val più la ragione di $10 : 2$ che quella di $8 : 2$, perchè l' esponente 5 della prima è maggiore del

re dell' esponente 4 della seconda, ma la ragione di $3 : 4$ è maggior di quella di $3 : 5$, perchè vagliono più tre quarti di tre quinti.

(37) In generale una ragion geometrica può divenir maggiore in due maniere, o col crescere dell' antecedente, restando fermo il conseguente, o col diminuire del conseguente, restando fermo l' antecedente.

(38) In effetti che ciò sia vero nelle ragioni di maggior inegualità è chiaro da se stesso, perchè in ciascuna dell' espresse due maniere si fa maggiore l' esponente della ragione, e quindi la ragione stessa. Ma non è men evidente, che altrettanto avvenga nelle ragioni di minor inegualità; poichè di queste ragioni è vero ancora, che quanto più s' accresce l' antecedente, restando fermo il conseguente, o quanto più si diminuisce il conseguente, restando fermo l' antecedente, tanto più l' antecedente si approssima al conseguente, e ne diviene una parte maggiore; lo che fa crescere la ragione.

(39) Nasce quindi, che di due ragioni, che hanno eguali conseguenti, la maggiore è sempre quella, che ha maggiore l' antecedente; ma di due ragioni, che hanno eguali gli antecedenti, la maggiore

re al contrario è sempre quella, che ha minore il conseguente.

(40) Dunque allorchè due grandezze disuguali si paragonano a una stessa terza (e però s'istituiscono due ragioni di conseguenti uguali) la grandezza maggiore dirà sempre alla terza una più gran ragione di quella, che le dice la minore. Ma al contrario, quando una terza grandezza si paragona ad altre due disuguali, (e con ciò si formano due ragioni di antecedenti eguali) la ragion di quella terza alla minore delle due sarà più grande sempre della ragione, che la stessa terza dice alla maggiore.

RAGIONI COMPOSTE

DEFINIZIONE IX.

(41) Quando date più ragioni semplici si genera un prodotto di tutti i loro antecedenti, e un altro di tutti i loro conseguenti, la ragion allora, che vedesi regnare tra questi due prodotti, prende il nome di *ragione composta* di tutte le semplici ragioni date. Per esempio delle due ragioni semplici di $4:2$, e di $9:3$, si chiamerà *ragion composta* quella di 36 (prodotto de' due

de' due antecedenti) a 6 (prodotto de' due conseguenti). Qui dunque la parola *comporre* si prende in senso di *moltiplica*, e non già di *addizione*, come si era praticato nel numero 19, ed altri successivi.

(42) E poichè l'esponente d'una ragion geometrica può sempre restar espresso da un rotto, che ha per suo numeratore l'antecedente, e per denominatore il conseguente di quella ragione; si vede bene, che moltiplicando insieme gli esponenti delle semplici ragioni, da cui vuol farsi una ragion composta, si formerà un rotto, che avrà per suo numeratore il prodotto di tutti gli antecedenti, e per denominatore il prodotto di tutti i conseguenti delle semplici ragioni date. Or questo rotto non è, che l'esponente della ragione, che da quelle si compone, in vigor della data definizione. Dunque può dirsi ancora, che una ragion composta sia quella, che ha per esponente suo il prodotto di tutti gli esponenti delle semplici ragioni, da cui si forma; e però quella pure, che un tal prodotto dice all'unità (7). Per esempio la ragion composta da una tripla, e da una quadrupla ragione, sarà quella di $12:1$; e la ragion composta dalle due di $4:2$, e di $9:3$, poco fa da noi supposte, sarà la ragion *sestupla*, o sia quella di $6:1$, qual'è appunto la ragion

ne del 36 (prodotto degli antecedenti) al 6 (prodoto de' conseguenti di quelle due ragioni).

(43) Nasce da ciò , che la ragion , che si compone da due ragioni reciprocamente eguali (15) sarà sempre di egualità : perchè di due ragioni reciproche è proprio (35) che sia l' antecedente della prima al conseguente suo , come il conseguente della seconda è al suo antecedente ; dunque le loro 4 grandezze formano una proporzione in modo che i due antecedenti delle ragioni supposte ne sono gli estremi , e i due conseguenti ne divengon i medii ; e però per la natura della proporzione (29) il prodotto de' due lor antecedenti val quanto quello de' due loro conseguenti . Dunque non altra ragion composta risulterà da esse , se non quella di egualità .

DEFINIZIONE X.

(44) Una ragion composta si chiama in particolare *ragione duplicata*, quando si compone da due semplici ragioni eguali ; *triplicata*, quando da tre ragioni eguali ; *quadruplicata*, quando da quattro , e così di seguito . Donde nasce , che una ragion duplicata avrà

E

per esponente suo il quadrato dell' esponente d'una delle due ragioni semplici , che la formano ; che è quanto dire , se le due ragioni semplici son per esempio triple , la duplicata d' una di esse sarà quella di 9 : 1 ; se quadruple , la duplicata sarà quella di 16 : 1 &c. . Del modo stesso l' esponente d' una ragion triplicata sarà eguale al cubo dell' esponente d' una delle tre semplici ragioni , che la compongono (sentesi per *cubo* il prodotto d' una grandezza moltiplicata due volte per se stessa : così 8 prodotto di 2 per 2 , e per 2 si chiama il cubo di 2 &c.) ; e però se le tre semplici ragioni , che la fanno , son per esempio duple , la ragion triplicata valerà quanto quella di 8 : 1 , se triple , quanto quella di 27 : 1 , e così di seguito .

Bisogna adunque non confondere tra loro la parola *dupla* colla *duplicata* , nè la *trippla* colla *triplicata* ; giacchè queste parole hanno un senso ben diverso , come si è potuto scorgere ne' recati esempj .

Vediam ora dalle date due definizioni quali verità si possono derivare .

(45) I. Saran tra loro eguali quelle due ragioni composte , che si compongono da un pari numero di semplici ragioni , e tali ancora , che ciascuna di quelle , che formano una , abbia la sua eguale in ciascuna di

na di quelle, che fanno la seconda. Poichè allora il prodotto degli esponenti di tutte le prime, è eguale al prodotto degli esponenti di tutte le seconde; dunque le due ragioni composte saranno pur eguali (6).

(46) Quindi è, che lo stesso sarà comporre una ragione da un dato numero di semplici ragioni eguali, che comporla da una di quelle, reiterata tante volte, quante furono le ragioni: per esempio sarà lo stesso comporre una ragione dalle tre ragioni eguali di $4:2$, di $6:3$, e di $10:5$, che comporla da una qualsivoglia di quelle, tre volte presa; giacchè così facendo, nessun cangiamento si reca negli esponenti di siffatte ragioni; e però in ciascuno de' due casi la ragion composta, che ne risulta, sarà sempre la medesima.

(47) Siccome dunque moltiplicando una ragione $1, 2, 3$ volte &c. per se stessa, si formano i quadrati, i cubi, le quarte potenze &c. de' due termini della ragione; così divien chiaro, che la duplicata d'una semplice ragione si abbia sempre ne' quadrati delle due grandezze, che la formano; la triplicata ne' cubi, e così di seguito; e per questo appunto una ragion duplicata vien chiamata da

Geome-

Geometri ragione di quadrati, una triplicata di cubi.

II. Allorchè due, o più proporzioni si moltiplican tra loro, termine per termine, i quattro prodotti di questo modo generati saranno pure in proporzione. Esempio

$$4 : 2 :: 6 : 3$$

$$5 : 1 :: 10 : 2$$



$$20 : 2 :: 60 : 6$$

Ne è la ragione, perchè i due primi di questi prodotti (cioè 20 , e 2) non altro sono, che una ragion composta dalle semplici ragioni, che trovansi nella sinistra parte delle proporzioni; del pari che i due ultimi (cioè 60 , e 6) esprimono anche una ragion composta da quelle ragioni semplici, che sono alla parte destra delle proporzioni (41). Or in ogni proporzione la sua ragion sinistra è sempre eguale alla destra sua ragione (16). Dunque le due ragioni composte sono pur eguali, e perciò i quattro prodotti in proporzione (45).

(48) Quindi è, che se quattro grandezze son in proporzione, lo saranno ancora i lor quadrati, i loro cubi, e tutte le altre loro simili potenze, (che

(o che è lo stesso, se due ragioni semplici sono eguali, lo saran pure le loro duplicate, le loro triplicate &c.). Giacchè per formare i quadrati di quattro grandezze proporzionali non si ha da far altro, che moltiplicare la proporzione una volta per se stessa; per formarne i cubi si dovrà moltiplicare due volte, e così di seguito.

(49) E poichè questi quadrati, questi cubi &c. non sarebbero giammai risultati proporzionali tra loro, se tali ancora non fossero state le quattro semplici grandezze, che colla lor moltiplicazione si generarono; potremo conchiudere al reciproco, che allorchè 4 quadrati, 4 cubi &c. sono in proporzione, saranno ancora proporzionali le loro radici, o sia le grandezze semplici, da cui vennero generati. Or se si avverte, che da Geometri si chiama ragione *sudduplicata* quella, che vi è tra le radici quadrate di due quadrati, (e ciò avuto riguardo alla ragione de' quadrati); *suttriplicata* quella, che regna tra le radici cubiche di due cubi (e ciò pure relativamente alla ragione de' due stessi cubi) &c. conchiuderemo ancora (dicendo in altri termini lo stesso di prima), che quando sono tra loro eguali due ragioni *duplicate*, due *triplicate* &c., lo

saran

saran pure le loro *sudduplicate*, le loro *suttriplicate*.

(50) III. Ecco adesso la terza verità, che riguarda le ragioni composte. Data una qualsivoglia serie di grandezze omogenee, tanto vale la ragione composta da tutte le semplici ragioni di grandezza prima a seconda, di seconda a terza, di terza a quarta, e così sino all' ultima; quanto la ragione semplice, che regna tra la prima, e l' ultima grandezza di quella serie. Esempio

Sia la serie 2, 4, 12, 3, 1, &c.

Le ragioni componenti saran quelle di 2 : 4
di 4 : 12
di 12 : 3
di 3 : 1

da cui nasce la ragione composta di 288 : 144
ragione dupla, qual'è appunto quella di 2 : 1
grandezze estreme della serie supposta

La ragione si è, perchè di quelle ragioni componenti di prima a seconda, di seconda a terza &c. ne divengon antecedenti tutte le grandezze supposte, fuorchè l' ultima, e conseguenti tutte le grandezze medesime, fuorchè la prima. Dunque allora
che

chè se ne generà la ragion composta (moltiplicando insieme tutti gli antecedenti , e insieme tutti i conseguenti) la prima grandezza della serie resta moltiplicata per tutte quelle, che tramezzano tra essa, e l'ultima, e l'ultima grandezza resta moltiplicata per tutte quelle, che tramezzano tra essa, e la prima; che è quanto dire, sì la prima, che l'ultima grandezza vengono moltiplicate per una stessa quantità; e per questo poi la ragione de' due prodotti (o sia la ragion composta di tutte le ragioni di prima a seconda, di seconda a terza &c.) non può esser punto diversa dalla ragione, che dice la prima grandezza all' ultima di quella serie (12)

(51) Avendosi dunque tre grandezze in proporzione continua, tanto valerà la ragione della prima alla terza, quanto la duplicata di quella, che vi è tra prima, e seconda, o pure tra seconda e terza: perchè allora la ragione della prima alla terza componendosi dalle due intermedie ragioni di prima a seconda, e di seconda a terza, si troverà composta da due ragioni eguali, e perciò sarà la duplicata d' una di quelle due, che la compongono (44) Per lo stesso principio in una serie di quattro grandezze continuamente proporzionali, la ragione di pri-

ma

ma a quarta dovrà valere, quanto la triplicata della semplice ragione, che dice la prima alla seconda, o la seconda alla terza, o questa alla quarta.

(52) E quindi avremo un' altro mezzo di poter esprimere la duplicata, o la triplicata &c di quella ragion semplice, che han tra loro due grandezze date. Poichè se dopo le due grandezze ne ritroviamo un' altra in proporzione continua (32), la ragione della prima grandezza a quella terza proporzionale, valerà quanto la duplicata della ragione, che han le due grandezze. E se in vece di una cerchiamo due di quelle terze continuamente proporzionali (facendo la grandezza prima alla seconda, come la seconda ad una terza, e poi la seconda alla terza, come questa ad una quarta); allora la ragione della prima delle due grandezze all' ultima delle trovate due proporzionali valerà quanto la triplicata di quella ragion, che hanno le supposte due grandezze.

(53) In fine col lume di questa terza verità una ragion semplice potrà essere commutata in una ragion composta; e reciprocamente più ragioni insieme potranno restar semplificate in una sola, e di condizione ancora, che abbia per uno de' suoi

Tom. I.

F

termini.

termini una grandezza data. Si perviene alla prima di queste due cose, inserendo tra le due grandezze della ragione una, o più altre quantità dello stesso genere di quelle; giacchè, se fra i due termini della ragione di $A:B$, vi si frappone un'altra grandezza C , già conosciuta, che tanto vaglia la ragion semplice di $A:B$, quanto quella, che componesi dalle due ragioni di $A:C$, e di $C:B$. La seconda poi delle due accennate cose si otterrebbe, è vero, col mezzo de' due prodotti, di cui uno fosse generato da tutti gli antecedenti, e l'altro da tutti i conseguenti di quelle ragioni, che vogliono si semplificare in una sola (41); ma siccome questo metodo non è applicabile, che alle sole quantità numeriche; così ora ne osserveremo un'altro, di cui può farsi uso nella Geometria, ed è il seguente.

(54) Le ragioni date, che si vogliono semplificare in una sola, e della condizione ancora, che abbiano per antecedente suo lo stesso antecedente per esempio della prima di esse, immaginiamo esser quelle

di $9:6$ | : $3:1$
 di $4:2$ | :
 e di $12:4$ |

Si cerchi allora dopo i due termini della ragione seconda, e il conseguente della prima, un quarto proporzionale, dicendo come $4:2$, così $6:3$, e scrivasi questo quarto proporzionale 3 accanto del conseguente 6 della ragion prima. Di poi si ritrovi un'altro quarto proporzionale in ordine alle due grandezze della terza ragione, e a quel primo, che si determinò, dicendo come $12:4$, così $3:1$; e scrivasi quest'altro quarto proporzionale 1 dopo del primo 3, siccome vedesi nell'esempio. Fatto ciò, le tre ragioni date si troveran semplificate nella sola ragione di $9:1$, e la dimostrazione ne è chiarissima; perchè le ragioni di $6:3$, e di $3:1$ essendosi costruite eguali rispettivamente a quelle di $4:2$, e di $12:4$, la ragion, che si compone dalle tre ragioni date, valerà necessariamente quanto quella, che si compone dalle tre ragioni di $9:6$, di $6:3$, e di $3:1$ (45), e però quanto la ragion semplice di $9:1$ (50).

(55) Quando dunque ci imbattiamo in due, o più proporzioni, ove tutte le ragioni, che si

trova-

trovano in una stessa loro parte (cioè, o tutte nella parte destra, o tutte nella sinistra) sono di condizione tale, che il conseguente della ragione prima fa di antecedente nella seconda, il conseguente di questa di antecedente nella terza, e così di mano in mano, come può vedersi in questo esempio

$$3 : 2 :: 9 : 6$$

$$4 : 2 :: 6 : 3$$

$$6 : 2 :: 3 : 1$$

$$72 : 8 :: 9 : 1$$

allora si potrà conchiudere con franchezza, che il prodotto 72 di tutti i primi antecedenti far debba al prodotto 8 di tutti i primi conseguenti, come il primo de' secondi antecedenti sta all'ultimo de' secondi conseguenti, cioè come 9 : 1

RAGIONI ORDINATE

PERTURBATE

DEFINIZIONE XI.

(56) Se avendosi due serie di un pari numero di grandezze, avviene il caso, che sia la prima alla seconda d'una serie, come la prima alla seconda dell'altra; e poi la seconda alla terza della prima serie, come pure la seconda alla terza dell'altra, e così continuando fino all'ultime grandezze: le ragioni allora, che regnano tra le grandezze successive d'una serie, diconsi *ordinate* colle ragioni, che han tra loro le grandezze successive dell'altra. Tali son queste due serie

Serie prima 48, 12, 9, 6, 3, &c.

Serie seconda 16, 4, 3, 2, 1, &c.

Ma se la grandezza prima sta alla seconda d'una serie, come la penultima all'ultima dell'altra; e poi la seconda alla terza della prima serie, come l'antepenultima alla penultima della seconda, e così di mano in mano con ordine contrario: allora le ragioni, che regna-

regnano tra le grandezze d' una serie, chiamansi *perturbate* con quelle, che han luogo tra le grandezze dell' altra. Sono tali per esempio queste due serie

Serie prima 48, 24, 16, 12, 3 &c.

Serie seconda 16, 4, 3, 2, 1 &c.

Due sono le verità, che di siffatte serie si possono dimostrare; la prima conviene a tutte due le definite specie; ma la seconda è propria solamente della prima. Ed eccole quali sono.

(57) I. In due serie di grandezze, che ha ragioni ordinate, o perturbate, le grandezze estreme d' una serie sono sempre in proporzione colle grandezze estreme dell' altra; cioè sta la prima all' ultima grandezza d' una serie, come la prima all' ultima dell' altra. Poiche in ciascuna delle due serie la ragione di prima ad ultima grandezza non è, che una ragion composta da tutte le semplici ragioni di prima a seconda, di seconda a terza, e così di seguito fino all' ultima (50). Ma in entrambi i casi le intermedie ragioni, da cui si forma ognuna di queste due ragioni composte, sono tra loro eguali ed in numero, ed in valore, per effetto della stessa supposizione. Dunque di necessità le due ragioni composte saran pure tra lor eguali. (45).

Adora

Allorche i Geometri ricavano di questo modo la proporzione tra le due grandezze estreme d' una serie, e le due estreme dell' altra, ciò lo dicon fatto *ex æquo*, o sia per *egualità di ragioni*.

(58) II. In due serie di grandezze, che procedon solamente con *ragioni ordinate*, la somma di tutte le grandezze dell' una sarà all' ultima della stessa serie, come la somma di tutte le grandezze dell' altra è pur all' ultima di quell' altra. In effetti ripigliando lo stesso esempio di sopra

Serie prima 48, 12, 9, 6, 3 &c.

Serie seconda 16, 4, 3, 2, 1 &c.

siccome si ha per supposizione $48 : 12 :: 16 : 4$, così componendo, sarà ancora la somma di 48, e 12 allo stesso 12, come la somma di 16, e 4 è allo stesso 4. Ma è pure per supposizione $12 : 9 :: 4 : 3$. Dunque la somma di 48, e 12, questo 12, e il numero 9, sono tre grandezze, che han ragioni ordinate colla somma di 16, e 4, collo stesso 4, e col numero 3; sicche poi conchiudendo per egualità di ragioni (57), sarà ancora la somma di 48 e 12 al 9, come la somma di 16, e 4 è al 3; e quindi componendo di bel nuovo, sarà la somma di 48, di 12, e di 9 allo stesso 9, come la somma di 16

di 16, di 4, e di 3 è allo stesso 3; che è quanto dire, le prime tre grandezze d'una serie son alla terza della stessa serie, come le prime tre grandezze dell'altra serie son alla terza pure di quell'altra serie. E dello stesso modo si fa procedere la dimostrazione fino che non si pervenga alle grandezze estreme di tutte due le serie,

(59) Qui si osservi, che per aver luogo le due dimostrate verità delle ragioni ordinate, non è necessario, che le grandezze d'una serie sian omogenee colle grandezze dell'altra; ma se ciò avviene, potendosi allora permutare tutte le ragioni supposte eguali (giacche si sa, che debbon essere d'uno stesso genere i due termini d'ogni ragione), segue di vantaggio, che ciascuna grandezza d'una serie dirà la ragione medesima a ciascuna grandezza, che le corrisponde nell'altra, per esempio la stessa ragione, che regna fra l'ultima grandezza d'una serie, e l'ultima dell'altra, regnerà pure tra la prima di quella, e la prima di questa, o tra la seconda dell'una, e la seconda dell'altra, o tra le terze di tutte due &c, come si può osservare nell'addotto esempio, ogniquale volta le ragioni supposte rispettivamente eguali si vogliano permutare,

(60) Dunque in tal caso si potrà ancor conchiudere, che la somma di tutte le grandezze d'una serie sia alla somma di tutte le grandezze dell'altra, come una qualsivoglia grandezza della prima sia alla grandezza corrispondente dell'altra, per esempio come prima a prima, come seconda a seconda, come terza a terza grandezza &c. Io che si accorda con quanto erasi dimostrato nel numero (27)

(61) E quindi trattandosi di grandezze tra loro tutte omogenee, siccome le due serie di ragioni ordinate porgon sempre (come ora l'abbiam veduto) un seguito di ragioni uguali, i di cui antecedenti sono rappresentati dalle grandezze d'una serie, e i conseguenti dalle grandezze dell'altra; così al reciproco da un seguito di ragioni eguali si potranno cavar sempre due serie di grandezze con ragioni ordinate. Vi si perverrà, tosto che in una serie si dispongon tutti di seguito gli antecedenti delle date ragioni, e in un'altra serie tutti ancor di seguito i loro conseguenti. Per esempio dalle tre ragioni eguali

di 10 : 2

di 15 : 3

G

di

Tom. I.

di 5 : 1
 si ritraggono queste due serie di ragioni ordina-
 re.

Serie prima 10, 15, 5.

Serie seconda 2, 3, 1.

RAGIONI, E PROPORZIONI ARITMETICHE

DEFINIZIONE XII

(62) Si chiama *ragione aritmetica* il paragone, che si fa di due grandezze omogenee, non già per osservare quante volte l'una contenga l'altra, (poichè visto abbiamo, che questo paragone prende il nome di ragione geometrica); ma per conoscere di quanto l'una supera l'altra. Il risultato di tal paragone si chiama la *differenza della ragione*, e si ritrova sottraendo la quantità minore della maggiore. Così nel paragone di 10 : 2, il risultato della ragione aritmetica, o sia la differenza di tal ragione è 8, che resta determinato col detrarre 2 da 10.

(63)

(63) Dunque in una ragione aritmetica l' antecedente val quanto il conseguente unito alla differenza della ragione, ogni qualvolta ella sia di maggiore inegualità: ma quando è di minore inegualità, il conseguente è quello, che val solo quanto la somma dell' antecedente, e della differenza della ragione.

(64) Una ragione aritmetica non cangia di valore, quando a ciascuna delle sue grandezze si aggiunge una medesima quantità, o pur si toglie. Poichè se alle due grandezze A, e B vi poniamo di comune la parte X, è chiaro, che la differenza tra tutta la grandezza A più X, e tutta la grandezza B più X si riduce alla sola, che vi è tra la parte A, e la parte B, giacchè l' altra parte X dell' una non differisce dalla parte X dell' altra. Differendo dunque tanto A più X da B più X, quanto differisce A da B, la ragione aritmetica di A a B sarà la medesima di quella, che A più X dice a B più X. E simile è l' argomento per la sottrazione.

(65) Due ragioni aritmetiche chiamansi *eguali*, allorchè i loro antecedenti eccedon egualmente, o egualmente ancora son ecceduti da' loro rispettivi conseguenti. Così la ragione aritmetica di 4 : 2 è eguale

G

eguale a quella di 3:1, (perchè 2 è la differenza di ciascuna di quelle due ragioni); e per lo stesso motivo la ragione aritmetica di 9:15 valerà quanto quella di 0:6 (giacchè di quanto 9 è superato da 15, di tanto 0 è superato da 6.)

(66) Due ragioni aritmetiche eguali formano la *proporzione aritmetica*; la quale si chiama pur *discreta*, sempre che il secondo termine è diverso dal terzo, come sarebbe questa, $10:3::8:1$; e prende il nome di *continua*, ogniquale volta il secondo termine è eguale al terzo, com'è la seguente $3:7::7:11$.

(67) Di una proporzione aritmetica sarà sempre proprio, che la somma de' suoi estremi termini sia eguale alla somma de' suoi termini medj. Poichè supposti gli antecedenti maggiori de' conseguenti, qualmente avviene nella proporzione $10:3::8:1$, siccome poco fa (63) veduto abbiamo, che in ciascuna delle due ragioni, tanto vaglia il solo antecedente, quanto il conseguente unito alla differenza di essa ragione; così si rende manifesto, che sommando i due termini estremi della proporzione, si vengon a sommare queste tre cose, cioè differenza di ragion prima, conseguente primo, e conseguente secondo.

secondo; e sommando i due medj si vengon pure ad unire insieme queste cose, cioè i conseguenti delle due ragioni, e la differenza della ragion seconda.

Or i conseguenti son i medesimi in tutti due i casi, e la differenza della prima ragione è per supposizione eguale alla differenza della seconda. Dunque di necessità la somma degli estremi dovrà valere quanto la somma de' medj. Simile a questa ne sarebbe la dimostrazione, supposti gli antecedenti minori de' conseguenti.

(68) E quindi in una proporzione aritmetica *continua* la somma degli estremi dovrà valere quanto il doppio del termine medio.

(69) Nasce da ciò, che per ritrovare dopo tre grandezze date la quarta in proporzione aritmetica, bisognerà sommare insieme la seconda con la terza, e da quella somma levar la prima: il resto sarà la quarta, che si v'è cercando.

(70) Ma quando dopo due si vuol la terza in proporzione aritmetica continua, converrà raddoppiar la seconda, e dal doppio levar la prima.

(71) E quando tra due grandezze date si vuol la media aritmeticamente proporzionale, sarà necessario unir insieme le due grandezze, e prenderne la

ac la metà.

PROPORZIONE

ARMONICA

(72) Oltre le due già osservate *proporzioni geometrica*, ed *aritmetica*, si conosce ancora in Geometria un' altra specie di *proporzione*, chiamata *armonica*: ed ha luogo in quelle 3 grandezze, dove la ragion geometrica trà prima e terza, è eguale alla ragione pur geometrica, che regnerà la differenza di prima e seconda, e la differenza di seconda, e terza. Sono di simil fatta queste 3 grandezze numeriche 2, 3, 6, in cui si avvera essere. 2, 3, 6, come la differenza trà 2, e 3 è alla differenza trà 3, e 6, cioè $2:6::1:3$; e di tal *proporzione* i Geometri ne dimostrano proprio, che il prodotto del termine medio per la somma de' due estremi è sempre il doppio di quello, che si genera dalli stessi estremi.

AVVER-

AVVERTIMENTO

(73) Sempre che nel decorso di queste lezioni elementari di Geometria s' incontra la parola *ragione*, o *proporzione* semplicemente, e senza di alcun altro aggiunto, s' intenderà parlare costantemente di *ragione*, e *proporzione geometrica*: perchè quando vogliasi far uso della *ragione*, o *proporzione aritmetica*, costumano i geometri di esprimerlo con distinzione, dicendo *ragione aritmetica*, o *proporzione aritmetica*, o pur *grandezze aritmeticamente proporzionali*. E lo stesso intendasi de' quarti, de' terzi, e de' medj proporzionali, che bisogna prender sempre in senso geometrico, e non già aritmetico, ogniqualvolta il contrario non ne sia chiaramente espresso.

FINE